

#BEPPEMATIK

Lärarhandledning

"Krona eller klave"

Matematiska färdigheter som eleverna får träna på

I denna övning får eleverna lära sig mer om sannolikhet genom att utföra ett experiment där de singlar slant och försöker få antingen krona eller klave flera gånger i rad. Singlat slant har säkert många av eleverna någon gång gjort då de ville att slumpen skulle avgöra vad som skulle ske men har de någonsin funderat över vad sannolikheten att kasta krona tio gånger i rad egentligen är?

Koppling till kursplaner i matematik

Övningen är kopplad till kursplanen i matematik för årskurs 4-6 i följande punkter som ligger under *Taluppfattning och tals användning*, *Sannolikhet och statistik* och *Samband och förändring*:

- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.
- Sannolikhet, chans och risk grundat på observationer, experiment eller statistiskt material från vardagliga situationer. Jämförelser av sannolikheten vid olika slumpmässiga försök.
- Enkel kombinatorik i konkreta situationer.
- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar. Tolkning av data i tabeller och diagram.

Övningen går även att koppla till kursplanen för årskurs 1-3 under Sannolikhet och statistik men rekommenderas främst till elever i årskurs 4-6.

Material

Till denna övning behövs penna, papper, tidtagare, en enkrona och en skål.

Instruktioner

Börja med att förklara för eleverna vad singla slant är och vilken sida på enkronan som är krona och vilken som är klave. Fråga därefter eleverna om de vet vad sannolikheten att få antingen den ena sidan eller den andra sidan om vi singlar slanten är. Många vet säkert redan att det är "lika så stor chans" eller 50/50 men låt eleverna resonera lite mer; om vi singlar slant flera gånger i rad, kommer sannolikheten för att få krona öka/minska efter varje gynnsamt kast eller är kasten oberoende av varandra och sannolikheten att få krona 50% varje gång vi kastar? Vad händer sedan med sannolikheten om vi istället vill att enkronan ska visa krona två gånger i rad eller kanske till och med fyra gånger i rad?

När vi singlar slant är utfallet vid varje kast oberoende av andra tidigare gjorda kast och sannolikheten att få krona vid ett kast är därmed alltid 0,5 (eller 50%) oavsett hur många gånger vi har singlat slanten innan. Om vi vill ha krona flera gånger i rad kommer dock sannolikheten för att detta sker vara längre än sannolikheten för att få krona vid endast ett enda kast. Sannolikheten för att få krona två gånger i rad är 25%, tre gånger i rad 12,5%, fyra gånger i rad 6,25% osv. En djupare förklaring till varför det är så och hur detta kan beskrivas med hjälp av diagram finner du lite längre ner i denna PDF.

Dags att singla slant! Säg till eleverna att de ska singla slant och försöka få krona (eller klave) så många gånger i rad som möjligt. Målet är att klara tio kast av samma sort i rad. En elev singlar slanten ner i skålen (det går även utan skål men ha då ett bra underlag att singla på) och en eller flera elever kontrollerar resultatet: håller ordning på hur många gånger som slanten har singlats gynnsamt i rad och tar tid. Beppe Singer har klarat att kasta krona 10 gånger i rad på endast 21 minuter men för en engelsk programledare tog försöket 12 timmar så ha tålamod när ni singlar slant!

Vem fick flest kronor (eller klavar) i rad? Var det någon av eleverna som till och med klarade att få krona (eller klave) hela tio gånger i rad? I så fall, hur lång tid tog det?

Ta gärna en stund efter försöket och berätta för eleverna hur liten sannolikheten att få krona 10 gånger i rad faktiskt är. Det är nämligen endast 0,1% chans! Se nedan hur denna sannolikhet har räknats ut.

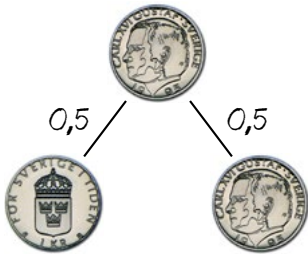
Förklaring om hur sannolikheten vid slantsinglande fungerar (underlag för pedagoger att få djupare kunskap):

Sannolikheten att få krona eller klave om vi singlar slant är lika stor, det vill säga, det är 50% chans att få krona och 50% chans att få klave vid ett enskilt kast. Alla kast är oberoende av varandra och detta gäller därför varje enskild gång vi singlar en slant. Sannolikheten att få ett visst resultat/utfall, till exempel krona tio gånger i rad som i

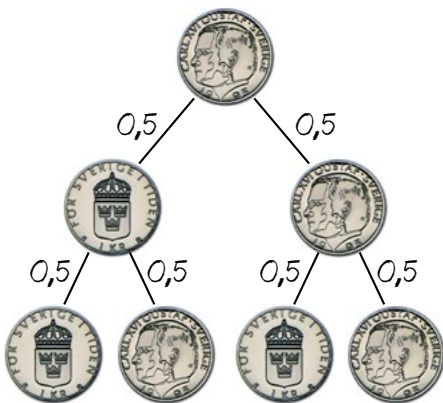
dagens försök, är dock inte densamma som sannolikheten att få krona vid ett enskilt kast. Utfallet av varje enskilt kast är fortfarande oberoende av övriga kast men i försöket finns det ännu en sak att ta hänsyn till: kasten innan behöver också ha varit gynnsamma, alltså ha gett krona de med. Sannolikheten för ett visst utfall kan räknas ut med hjälp av ett träd diagram.

Träd diagram är ett sätt att visualisera vad som händer i ett sannolikhetsproblem med hjälp av en bild och kan med fördel utnyttjas av eleverna när de utför olika sannolikhetsövningar. Säg till exempel att vi vill få krona två gånger i rad. För att ta reda på hur stor sannolikheten att få krona två gånger i rad är så kan vi ställa upp ett träd diagram enligt stegen nedan.

Vi börjar med det första kastet, det finns två olika utfall, krona eller klave, och båda har lika stor sannolikhet att inträffa. Detta blir början på vårt träd diagram (tänk på att 50% också kan skrivas som 0,5):



Tänker vi oss att vi singlar slant ännu en gång kan vi sedan förlänga träd diagrammet till:



Om vi tittar på trädets förgreningar efter två kast ser vi att det finns fyra möjliga utfall:

- Utfall 1: krona – krona
- Utfall 2: krona – klave
- Utfall 3: klave – krona
- Utfall 4: klave – klave

Av fyra möjliga utfall är det dock bara ett av dem som vi vill ska hända, alltså att vi får krona två gånger i rad. Det är därmed 1 på 4 att vi lyckas, vilket kan skrivas som $\frac{1}{4}$, 0,25 eller 25% chans.

Det går även att räkna ut sannolikheten utan att rita ett trädigram eller skriva ner varje utfall som kan ske. Vid varje kast är sannolikheten 0,5 att det antingen blir krona eller klave. Följer vi vägen för att få krona två gånger i rad i trädet så ser vi att den vägen går via två grenar/streck som båda har siffran 0,5 bredvid sig. Vi kan multiplicera dessa siffror med varandra och får då fram sannolikheten:

$$0,5 \cdot 0,5 = 0,25, \text{ alltså } 25\% \text{ sannolikhet.}$$

På samma sätt går uträkningen att upprepa för tre, fyra, fem, etc kast för att ta reda på sannolikheten för just det utfall du vill ha.

Sannolikheten för att få krona tio gånger i rad som i dagens försök beräknas alltså genom att multiplicera sannolikheten för att få krona vid ett kast, 0,5, med sig själv tio gånger:

$$0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1/1024 \approx 0,1\%$$

Förslag på utveckling av övningen

Det roliga med slumpen är att resultaten kan bli väldigt olika trots att sannolikheten är densamma. En elev kanske har lika tur som Beppe Singer medan andra har otur och tröttnar innan de ens är i närheten av att få krona 10 gånger i rad!

Ta en stund och berätta för eleverna om slumpen och varför den har så stor påverkan på utfallen. Med hjälp av kunskaper i sannolikhetslära kan vi förutspå och ha smartare gissningar men på grund av slumpen kommer vi ändå aldrig att veta exakt hur det ska gå förrän försöket är klart. Har eleverna någonsin spelat ett spel där det pratas om chanser, odds eller något annat där slumpen är en faktor? Det går nämligen att, med hjälp av kunskaper inom sannolikhetslära, öka sina chanser att vinna i olika spel!

Dela med er!

Hur ser det ut när ni gör övningen på fritids, i klassrummet eller hemma? Fota och filma gärna! Kommentera på www.matteboken.se/beppeamatik/krona-eller-klave eller hashtagga med #Beppeamatik i sociala medier.

Lycka till!