Fingeröfvningar

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 1)
Anders Källén

Introduktion

Det här arbetsbladet innehåller rena räkneövningar. Även en del kan verka väl enkla, är det av värde att gå igenom dem för att öva upp sin, just det, fingerfärdighet. Så att man inte behöver tänka efter i dessa steg. I föreläsningar och andra framställningar antas ofta att sådana här operation är så självklara att de inte ens kommenteras.

Aritmetik - basal räknefärdighet

Övning 1 Beräkna (i huvudet)

$$a)\ \frac{6}{2},\quad b)\ \frac{1}{\frac{1}{3}},\quad c)\ 0.3\cdot 0.4,\quad d)\ \frac{0.81}{0.03},\quad e)\ \frac{8}{0.4}+\frac{15}{0.5}$$

Övning 2 Beräkna (i huvudet)

$$a)\ (-3)(-7),\quad b)\ -20+(-5),\quad c)\ -20-(-15),$$

$$d)\ (-2)(-5)(-3)$$

Övning 3 Avgör genom huvudräkning vilka av följande tal som är lika

$$\frac{2}{7},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{4}{14},\quad \frac{48}{168},\quad \frac{24}{84},\quad \frac{0.00002}{0.000007}.$$

Övning 4 Förkorta så långt som möjligt

$$a)\ \frac{105}{56},\quad b)\ \frac{56}{105},\quad c)\ \frac{0.56}{1.05},\quad d)\ \frac{5.6}{10.5}$$

När man ska ställa en summa av bråk på ett gemensamt bråkstreck är det viktigt att försöker hålla nämnaren så liten som möjligt under räkningarna. Detta gör man genom att hitta minsta gemensamma nämnare.

Exempel 1 Vi vill ställa talet

$$\frac{1}{12}-\frac{5}{42}$$

på ett gemensamt bråkstreck. Vi ser då att $12 = 2\cdot 2\cdot 3$ medan $42 = 2\cdot 3\cdot 7$. Den minsta gemensamma nämnaren blir därför $2\cdot 2\cdot 3\cdot 7$, vilket vi väntar med att räkna ut. Istället räknar vi genom att faktoruppdela:

$$\frac{1}{12}-\frac{5}{42}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}-\frac{5}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{7}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}-\frac{2\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}=$$

$$\frac{7-10}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}=\frac{-3}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}=\frac{-1}{2\cdot 2\cdot 7}=-\frac{1}{28}.$$

Man behöver inte faktorisera helt och hållet, men ska försöka hitta en så stor gemensam delare som möjligt. Vi kan alternativt organisera räkningarna på följande sätt. Eftersom $12 = 2\cdot 6$ och $42 = 7\cdot 6$ har vi att

$$\frac{1}{12}-\frac{5}{42}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{7}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{7-10}{14}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{14}=-\frac{1}{28}.$$

Med den här metoden måste man dock antingen vara säker på att man hittat den största gemensamma delaren, eller så måste man se efter om man kan förkorta svaret ytterligare.

På samma sätt räknar man när det handlar om bråk av polynom (se längre ner).

Övning 5 Ställ på gemensamt bråkstreck med så liten nämnare som möjligt

$$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6},\quad b)\ \frac{14}{9}-\left(\frac{1}{18}+\frac{2}{27}\right),\quad c)\ 3+\frac{1}{7}-\frac{15}{14}-\frac{1}{2}$$

$$d)\ \frac{1}{60}+\frac{1}{108}-\frac{1}{72},\quad e)\ \frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{9},\quad f)\ \frac{1}{35}-\frac{1}{25}+\frac{1}{63}-\frac{1}{245}.$$

Övning 6 Beräkna

$$a)\ \frac{3}{\frac{4}{5}+1},\quad b)\ \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}},\quad c)\ \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

Övning 7 Beräkna

$$a)\ \frac{5\cdot\frac{3}{2}}{9},\quad b)\ \frac{5\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}}{10},\quad c)\ \frac{3(-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{-4})}{-\frac{8}{3}},\quad d)\ \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{7}{8})}{-\frac{1}{2}-\frac{7}{8}}$$

Övning 8 Förenkla

$$a)\ \frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}+\sqrt{2}},\quad b)\ \frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}},\quad c)\ \left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

Övning 9 Förenkla

$$a)\ \sqrt{12}-\sqrt{3},\quad b)\ \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}},\quad c)\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{12},$$

$$d)\ \frac{\sqrt{18}+\sqrt{8}}{5},\quad e)\ \sqrt{3^2+4^2}-3-4,\quad f)\ \sqrt{5^2+12^2}.$$

Övning 10 Förenkla (ej approximationer)

$$a)\ \sqrt{2}(2\sqrt{6}-\sqrt{12}-\sqrt{24}+\sqrt{48}),\quad b)\ \sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{8}-\sqrt{2}),\ c)\ (\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$$

Algebraiska räkningar

Algebraiska räkningar innebär att man gör samma sorts räkningar som man gör med heltal fast med uttryck som innehåller bokstäver. Men även nu ska vi faktorisera (nu uttryck istället för tal), förkorta och ställa på gemensamma bråkstreck.

Övning 11 Förenkla följande uttryck:

$$a)\ x^2+(3x-1)-(x^2-x+3),\quad b)\ 7+(5a+2b-3)-(3a+4b-2),$$

$$c)\ a(b-c)-b(c-a)$$

Övning 12 Förenkla

$$a)\ 5x-(3x-(x-1)),\quad b)\ x+y-(x-2y)+(2x-y),$$

$$c)\ (a+b+c)d-(b-a+d)c$$

Övning 13 Utveckla

$$a)\ (2x+3y)^2,\quad b)\ (3x+4y)(3x-4y),\quad c)\ (2x+3y-z)^2$$

Övning 14 Förenkla så långt som möjligt

$$a)\ \frac{3x+2}{5}-\frac{2x-1}{5},\quad b)\ \frac{5x^2-y^2}{5xy}-\frac{2x-3y}{2y}+2$$

Övning 15 Skriv på ett bråkstreck

$$a)\ \frac{a/b}{b/c}, \qquad b)\ \frac{\frac{a^2b}{c}}{\frac{ab^2}{c^2}}, \qquad c)\ 1+\frac{4a}{(a-1)^2},$$

$$d)\ \frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$$

Övning 16 Förenkla

$$a)\ \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}}, \qquad b)\ \frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}}, \qquad c)\ \frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}}, \qquad d)\ \frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a}.$$

Övning 17 Förenkla

$$a)\ \frac{\frac{3}{5x}-\frac{x}{15}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}, \qquad b)\ \frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}}, \qquad c)\ \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}}.$$

Övning 18 Förenkla

$$a)\ \frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}, \qquad b)\ \frac{\frac{16x^4}{81}-y^4}{\frac{2x}{3}+y}, \qquad c)\ \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}.$$

Övning 19 Förenkla

$$a)\ \frac{4x^2-4}{2x+2}, \qquad b)\ \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}, \qquad c)\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}+\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}$$

Övning 20 Förenkla

$$a)\ \frac{2}{3x+9}+\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{2x-6}, \qquad b)\ \frac{5}{x-1}+\frac{8}{x+1}-\frac{3x+7}{x^2-1}.$$

Övning 21 Förenkla

$$a)\ \frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{(x-y)^2}, \qquad b)\ \frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}$$

Övning 22 Förenkla

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

Bli av med rötter i nämnaren

Exempel 2 Vi vill skriva bråket $\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ så att nämnaren blir rotfri. Att detta går beror på att om vi multiplicerar täljare och nämnare med $\sqrt{5}-2$, så blir det i nämnaren $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-2^2=1$ och vi får alltså

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{5+\sqrt{5}-6}{1}=\sqrt{5}-1.$$

Övning 23 Skriv om så att nämnaren inte innehåller rottecken

$$a)\ \frac{1}{\sqrt{3}+1}, \qquad b)\ \frac{1}{\sqrt{5}-2}, \qquad c)\ \frac{1}{1-(\sqrt{7}-2)^2}, \qquad d)\ \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Övning 24 Skriv bråken

$$a)\ \frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}, \qquad b)\ \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}, \qquad c)\ \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

så att de får rotfri nämnare.

Polynomdivision

Att dividera ett heltal kan göras uppställningsmässigt på flera olika sätt: kort division, trappan eller liggande stolen. Oavsett vilket sätt man använder är det man gör samma sak, som illustreras i nästa exempel.

Exempel 3 Låt oss dividera 2398 med 17. Vi börjar då med att se hur många gånger 17 går i 23. Detta därför att vi skriver $2398 = 2300 + 98$ och ser efter först vad $2300/17$ är. Eftersom $23 = 17 + 6$ ser vi att $2300/17 = 100 + 600/17$. Med andra ord

$$\frac{2398}{17}=\frac{1700+698}{17}=100+\frac{698}{17}.$$

Vidare: $698/17 = (680 + 18)/17 = 40 + 18/17$, så

$$\frac{2398}{17}=100+40+\frac{18}{17}=140+1+\frac{1}{17}.$$

Vi har alltså att $2398 = 141 \cdot 17 + 1$, vilket betyder att vi har en kvot 141 och en rest 1.

Övning 25 Genomför räkningen med den uppställning du är van vid.

Samma sak kan nu göras vid polynomdivision, då ett polynom med högre grad divideras med ett med lägre eller samma grad. Om vi har två polynom $f(x)$ och $g(x)$ givna så finns det alltid polynom $q(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

där gradtalet för $r(x)$ är lägre än det för $g(x)$. Vi kallars $q(x)$ för kvoten och $r(x)$ för resten och divisionen är endast intressant om gradtalet för $f(x)$ är högre eller lika med gradtalet för $g(x)$. För att finna kvot och rest gör vi precis som för tal:

Exempel 4 Vi vill dividera $f(x) = x^4 + x^2 - x + 1$ med $g(x) = x^2 + 3$. Vi går då tillväga systematiskt som

$$x^4+x^2-x+1=(x^2(x^2+3)-3x^2)+x^2-x+1=x^2(x^2+3)-2x^2-x+1$$

$$=x^2(x^2+3)-2(x^2+3)+6-x+1=(x^2+3)(x^2-2)-x+7.$$

Kvoten är därför $q(x) = x^2 - 2$ medan resten är $r(x) = -x + 7$. Notera att resten har gradtalet 1 medan det vi dividerar med har gradtalet 2.

Övning 26 Genomför räkningarna med din favorituppställning!

Övning 27 Bestäm kvot och rest om vi dividerar

a) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ med $x^3 + x + 1$,
b) $x^6 - 1$ med $x - 1$,
c) $x^4 + 2x^3 + 25$ med $x^2 + 4x + 5$.