# Kvadratkomplettering

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 2)
Anders Källén

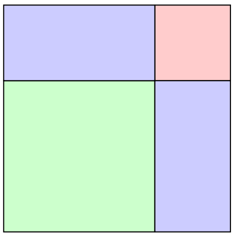
## Kvadreringsregeln

När man ska lösa andragradsekvationer kan man använda en färdig formel (ofta kallat $pq$-formeln), men bättre är att härleda den varje gång genom att kvadratkomplettera. Detta ger nämligen mycket mer information.

Kvadreringsregeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

fås genom att man multiplicerar ut och illustreras geometriskt i nedanstående figur för positiva $a, b$:



**Övning 1** Förklara hur figuren kan användas till att illustrera att

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

## Kvadratkomplettring i en variabel

Om vi har ett andragradspolynom

$$p(x) = x^2 + bx + c$$

(notera att högstagradskoefficienten är ett), så kan vi använda kvadreringsregeln ovan till att skriva

$$p(x) = x^2 + 2\frac{b}{2}x + c = x^2 + 2\frac{b}{2}x + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c =$$

$$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c.$$

Detta kan användas till mycket. Men gör först följande övning.

**Övning 2** Kvadratkomplettera följande polynom

$$a)\quad x^2 + 2x + 1, \qquad b)\quad x^2 + 2x - 1, \qquad c)\quad y^2 - y - 6$$

Vad kan vi då använda en kvadratkomplettering till?

Vi kan t.ex. använda kvadratkomplettering till att bestämma nollställen till polynomet (lösa ekvationen $p(x) = 0$).

**Exempel 1** Lös ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$. Vi börjar med att kvadratkomplettera polynomet:

$$x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}.$$

Att sätta detta lika med noll är ekvivalent med

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Ibland går det inte att hitta reella lösningar till ekvationen:

**Exempel 2** Polynomet $p(x) = x^2 - x + 1$ har inget reellt nollstället, ty

$$x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Det sista uttrycket är alltid större än $3/4$, och kan därför aldrig bli noll.

**Övning 3** Bestäm, om de finns, nollställena till polynomen i föregående övning.

## Parabler

Vi börjar med en uppmjukningsövning som innehåller de viktiga idéerna.

**Övning 4** Bestäm (genom att kvadratkomplettera) det minsta värde som andragradspolynomet $p(x) = 4x^2 + 12x + 17$ kan anta. I vilken punkt antas detta minimum? Har $p(x)$ några nollställen?

Grafen till ett andragradspolynom, alltså en kurva $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$, kallas en parabel. Den ritar vi lätt om vi först kvadratkompletterar:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

**Övning 5** Bara genom att titta på uttrycket ovan avgör följande:

1. Vad är det som avgör om kurvan har ett maximum eller ett minimum?
2. I vilken punkt antas detta maximum/minimum?
3. Vilket värde på $y$ får vi i denna punkt?
4. Vad måste gälla för $a, b, c$ för att ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ ska ha en lösning?

**Övning 6** Rita grafen till följande polynom:

$$a)\quad x^2 - 2x + 5, \qquad b)\quad x^2 - x - 6, \qquad c)\quad 2x^2 - 8x + 3.$$

Vilka av polynomen har reella nollställen? Vilka är de i så fall?

## Kvadratkomplettering i flera variabler

Ibland behöver man kvadratkomplettera också andragradspolynom i flera variabler. Detta innebär inget nytt, man tar en variabel i taget. Dock kommer resultatet ibland att bero av i vilken ordning man valde variabler.

**Exempel 3** Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4$. Här kan vi ta $x$ för sig och $y$ för sig:

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1, \qquad y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4,$$

från vilket vi får

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 =$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9.$$

**Övning 7** Kvadratkomplettera polynomen

$$a)\quad x^2 + 6x + y^2 - 4y + 1 \qquad b)\quad x^2 - y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z.$$

**Exempel 4** Nu ska vi istället kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y - 5$. Här måste vi bestämma oss för i vilken ordning vi ska ta variablerna.

Om vi börjar med $x$ måste vi organisera termerna så att vi kan kvadratkomplettera m.a.p. $x$:

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y - 5 = x^2 - 2x(1+y) + 2y^2 - 4y - 5 =$$

$$(x - (1+y))^2 - (1+y)^2 + 2y^2 - 4y - 5.$$

Vi har nu en kvadrat som innehåller $x$ och inga andra $x$ kvar. Vi måste nu skriva om resten, som endast beror på $y$, genom att kvadratkomplettera:

$$(x - (1+y))^2 - 1 - 2y - y^2 + 2y^2 - 4y - 5 =$$

$$(x - (1+y))^2 + y^2 - 6y - 6 = (x - y - 1)^2 + (y-3)^2 - 15.$$

Vi ser alltså att

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y - 5 = (x - y - 1)^2 + (y-3)^2 - 15.$$

Från detta kan vi avgöra att (tänk efter!!)

1. Det minsta värde som polynomet kan anta då vi varierar både $x$ och $y$ är $-15$.
2. Vi kan få värdet $-15$ endast då $x - y - 1 = 0$ och $y - 3 = 0$, alltså då $x = 4$ och $y = 3$.

**Övning 8** Räkna om uppgiften men börja med att först kvadratkomplettera m.a.p. $y$. Ändras slutsatsen ovan?

## Blandade övningar

**Övning 9** Kvadratkomplettera följande polynom

$$a)\quad 5 + 2x - x^2, \qquad b)\quad 7 - 10y - 4y^2, \qquad c)\quad x^2 + 3x + 4$$

$$d)\quad 1 - x - x^2, \qquad e)\quad 16x^2 + 9 - 16x.$$

**Övning 10** Bestäm, om de finns, de reella nollställena till polynomen i föregående övning.

**Övning 11** Bestäm (genom att kvadratkomplettera) minsta värdet av

$$a)\quad x^2 + 4x - 1, \qquad b)\quad 5x^2 - 10x + 21, \qquad c)\quad x^2 + x + 1.$$

**Övning 12** Bestäm (genom att kvadratkomplettera) största värdet av

$$a)\quad 5 + 2x - x^2, \qquad b)\quad 7 - 10x - x^2, \qquad c)\quad 7 - 10x - 4x^2.$$

**Övning 13** Kvadratkomplettera uttrycken

$$a)\quad x^2 + 6y^2 + 4xy, \qquad b)\quad x^2 + y^2 + 4xy, \qquad c)\quad x^2 + y^2 + 2xy.$$

**Övning 14** Kvadratkomplettera uttrycken

$$a)\quad x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 4yz, \qquad b)\quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz.$$

**Övning 15** Bestäm det största värdet som funktionen

$$f(x,y,z) = 10(x+y+z) - x^2 - y^2 - z^2$$

kan anta.