Faktorisering av polynom

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 3)
Anders Källén

Faktorisering

Att faktorisera betyder att skriva som produkter. Man faktoriserar t.ex. heltal i primtal när man skriver

$$864360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4.$$

Vi säger då att 864360 kan faktoriseras i 2 (med multiplicitet 3), 3 (med multiplicitet 2), 5 och 7 (med multiplicitet 4). Här ska vi intressera oss för att faktorisera polynom. Det innebär t.ex. att vi skriver

$$x^4 + 2x^3 - 39x^2 - 148x - 140 = (x-7)(x+2)^2(x+5).$$

Här är faktorerna $x+2, x+5$ och $x-7$ och den andra förekommer med multiplicitet 2.

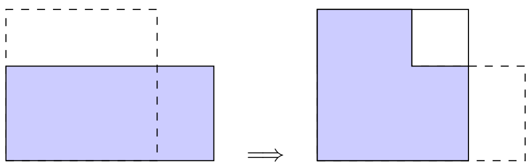
I det här arbetsbladet ska vi se närmare på några aspekter av faktorisering av polynom, vilket bl.a. innefattar den betydelsefulla *faktorsatsen*.

Konjugatregeln

Den basala konjugatregeln

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

kan (för $a > b$) geometriskt illustreras som



Övning 1 För att förstå beviset måste man identifiera vad som är a och vad som är b. Gör det!

Övning 2 Förenkla uttrycken

$$a) \quad (3x+5)^2 - (3x-5)^2,$$

$$b) \quad ((\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{x+y})((\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \sqrt{x+y})$$

Utvecklade du kvadraten i a)? Räkna då om uppgiften men använd konjugatregeln istället.

Faktorisering av andragradspolynom

Ett andragradspolynom är ett polynom på formen

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

där $a \neq 0$ för annars blir polynomet inte av andra graden. För att faktorisera det bryter man först ut a så att man får kvar ett polynom med högstagradskoefficient 1. Att faktorisera polynomet innebär att vi vill skriva

$$p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

för lämpliga tal α_1, α_2.

Systematiskt gör vi detta genom att först kvadratkomplettera och sedan använda konjugatregeln:

Exempel 1 För att faktorisera polynomet $x^2 - x - 2 = 0$ skriver vi om det som

$$x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}.$$

Sedan använder vi konjugatregeln på denna skillnad.

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = ((x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2})((x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}) = (x+1)(x-2).$$

Faktoriseringen är alltså $(x+1)(x-2)$.

Ur detta följer att $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$, och det senare kräver att antingen $x+1=0$ eller $x-2=0$. Så polynomet har alltså nollställena $x = -1, 2$.

Anmärkning Ibland får vi ett $+$ mellan de två kvadraterna. Då kan vi inte gå vidare och det går inte att faktorisera polynomet.

Ibland kan man "se" faktoriseringen av ett andragradspolynom.

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$

Detta ger att ekvationssystem som ibland kan lösas i huvudet.

Exempel 2 I fallet ovan ska gälla att

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 = -2 \end{cases}.$$

Om det finns heltalslösningar måste dessa vara faktorer i -2, vilket ger kandidaterna $\pm 1, \pm 2$. Enda kombinationen som duger helt och hållet är $2, -1$.

Övning 3 Lös ekvationen $x^2 + 8x - 9 = 0$ i huvudet. Gör det sedan genom att systematisk plocka fram en faktorisering.

Övning 4 Faktoruppdela följande andragradspolynom, om det går:

$$a)\ x^2 - 3x + 2, \quad b)\ 6 - 2x - 4x^2, \quad c)\ x^2 + x + 1.$$

Faktorsatsen

Ett allmänt polynom kan skrivas

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0.$$

Det sägs vara av n:te graden om $a_n \neq 0$.

Låt α vara ett tal vilket som helst. Vi kan då skriva

$$p(x) = (x-\alpha)q(x) + C$$

där $q(x)$ ett annat polynom av grad $n-1$ och C ett tal. För att se varför räknar vi ett exempel.

Exempel 3 Tag $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ och $\alpha = 2$. Då får vi

$$p(x) = (x-2)x^2 - 5(x-2) - 10 + 6 = (x-2)(x^2-5) - 4.$$

Vi har alltså $q(x) = x^2 - 5$ och $C = -4$.

Övning 5 Gör samma sak (samma polynom som i föregående övning) först med $\alpha = 4$ och sedan med $\alpha = 3$. Vilken är skillnaden mellan de två fallen?

Om vi har ett polynom $p(x)$ och ett tal α kan vi alltså därför skriva $p(x) = (x-\alpha)q(x) + C$. Men då ser vi att

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + C = 0 \cdot q(\alpha) + C = C,$$

så konstanten är polynomets värde då $x = \alpha$.

Övning 6 Kontrollera att det stämmer i exemplet ovan.

Om vi kan skriva $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ (alltså $C = 0$) säger vi att $(x-\alpha)$ delar $p(x)$ vilket vi skriver $(x-\alpha)|p(x)$.

Vi har nu följande sats.

Sats (Faktorsatsen) Om $p(x)$ är ett polynom så gäller att

$$p(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-\alpha)|p(x).$$

Övning 7 Ange ett andragradspolynom som har nollställena *a*) $3, -2$, *b*) $2 \pm \sqrt{5}$.

Övning 8 Bestäm det 4:e-gradspolynom $p(x)$ som har nollställena $0, 3, 2, -1$ och högstagradskoefficient -2.

Exempel 4 Låt oss återgå till polynomet $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ovan. Vi vill faktorisera det. Det finns allmänna formler för hur man löser tredjegradsekvationer, men de ska vi inte använda.

Istället gör vi så att vi ser efter om vi kan "se" ett nollställe (vi har hittat ett ovan, men låt oss ignorera det). Prövar vi oss fram ser vi att

$$p(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0.$$

Faktorsatsen säger då att vi kan skriva $p(x) = (x-1)q(x)$ och för att bestämma $q(x)$ gör vi som ovan:

$$p(x) = x^2(x-1) - x^2 - 5x + 6 = x^2(x-1) - x(x-1) - 6x + 6$$
$$= (x-1)(x^2 - x - 6).$$

Det följer att $q(x) = x^2 - x - 6$, som är ett andragradspolynom, vilket vi kan faktorisera som ovan:

$$q(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3).$$

Vi har därmed fullständigt faktoriserat $p(x)$ som

$$p(x) = (x+2)(x-1)(x-3).$$

Övning 9 Faktorisera följande tredjegradspolynom så långt det går

$$a) \quad x^3 - 11x^2 + 23x + 35, \qquad b) \quad x^4 - 1.$$

Anmärkning Alla polynom går naturligtvis inte att faktorisera i faktorer på formen $(x-\alpha)$ (kallas linjära faktorer). Om ett andragradspolynom har komplexa nollställen går det t.ex. inte, om vi kräver att α ska vara reella tal. Vi säger då att vi faktoriserar över de reella talen. Om vi tillåter även komplexa α (vi säger då att vi faktoriserar över de komplexa talen), så finns det en viktig sats, **Algebrans fundamentalsats**, som medför att varje polynom kan faktoriseras i linjära faktorer. Men det är en annan historia!

Blandade övningsuppgifter

Övning 10 Faktorisera följande andragradspolynom

$$a) \quad 3x^2 + 4x - 4, \qquad b) \quad 5x^2 - 10x - 40.$$

Övning 11 Faktorisera följande polynom i reella faktorer:

$$a)\ x^2 - 1, \quad b)\ x^2 + 1, \quad c)\ x^3 - 1, \quad d)\ x^3 + 1, \quad e)\ x^4 + 27x$$

Övning 12 Faktorisera följande polynom

$$a)\ x^3 + 2x^2 - 2x - 1, \quad b)\ x^3 + 4x^2 + 6x + 4, \quad c)\ 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1.$$

Övning 13 För vilka tal a blir polynomet $x^4 + ax + 4$ delbart med $(x-2)$?

Övning 14 Är $(x+1)$ en faktor i polynomet $x^{2015} + x^{24} - x^{10} + 1$.

Övning 15 Polynomet $x^5 - 10x^2 + 15x - 6$ har nollstället $x = 1$. Bestäm nollställets multiplicitet och faktorisera polynomet.

Övning 16 Faktorisera följande polynom

$$a) \quad x^3 + 10x^2 + 24x, \qquad b) \quad x^4 + 10x^3 + 25x^2, \qquad c) \quad x^3 - 2x - 4.$$

Övning 17 Faktorisera uttrycken

$$a) \quad (x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2, \qquad b) \quad (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2$$

Övning 18 Visa att

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c).$$

Visa sedan att högerledet kan skrivas om som

$$16p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ där } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Övning 19 Faktorisera $x^3 + x^2 - 6x - x^2y - xy + 6y$.