Potenser och potenslagar

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 4)
Anders Källén

Introduktion

Potenslagarna är några av de viktigaste lagarna i matematiken. De är självklara under vissa omständigheter (när potensen är ett positivt heltal), men hur de ska definieras när exponenten är något annat än ett positivt heltal är mindre självklart.

Potenslagarna

Om $a > 0$ är ett reellt tal, så gäller de fundamentala potenslagarna

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy},$$

där x och y är reella tal. Dessutom har vi att, om $a, b > 0$,

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

Det här arbetsbladet diskuterar hur uttrycken a^x ska definieras och innehåller övningar på räknereglerna.

Arkimedes potenslagar – exponenten ett positivt heltal

Om $n > 0$ är ett heltal definierar vi

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$

där vi i högerledet multiplicerar ihop n tal a. Potenslagarna

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n,$$

(n, m positiva heltal) är då självklara: man måste bara tänka efter hur många a:n man multiplicerar.

Övning 1 Visa att

$$a^3 \cdot a^5 = a^8, \qquad (a^3)^5 = a^{15}$$

genom att ordentligt skriva de ingående elementen som produkter av a. På samma sätt visa att

$$(ab)^5 = a^5 b^5.$$

Övning 2 Beräkna

$$a) \quad \left(\frac{5 \cdot 10^5}{125}\right)^3, \quad b) \quad \frac{9^4 \cdot (\frac{1}{3})^3}{27^2}$$

För heltal n är det inga problem att definiera a^n också för negativa tal a (vi ska ju bara multiplicera).

Övning 3 Beräkna

$$a) \quad (-2)^3 + (-1)^4 - (-1)^3, \quad b) \quad (-3)^2 - 3^2.$$

Beräkna a^n för andra heltal

Vad är a^0 och a^{-n} där n är ett positivt heltal?

Vi vill att dessa ska vara definierade så att potenslagarna gäller för alla heltal.

För $n = m = 0$ innebär första potenslagen att $a^0 \cdot a^0 = a^{0+0} = a^0$, dvs $x = a^0$ ska lösa ekvationen $x^2 = x$. Denna har bara två lösningar, $x = 0, 1$. Vilket ska vi välja?

Om vi sätter $a^0 = 0$ så får vi att $a^x = a^{x+0} = a^x \cdot a^0 = a^x \cdot 0 = 0$, vilket vore ganska meningslöst. Vi måste därför bestämma att

$$a^0 = 1.$$

För att se vad a^{-n} måste vara, noterar vi att om $n > 0$ är ett heltal, så kräver potenslagarna att

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Men detta betyder precis att vi måste ha att

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Övning 4 Beräkna $\dfrac{(3^{-3})^2}{3^4 \cdot 3^{-6}}$.

Anmärkning Beviset ovan visar naturligtvis att det alltid gäller att

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

vare sig x är ett heltal eller inte (så länge vi har definierat vad a^x är).

Beräkna a^x när $x = m/n$ är ett rationellt tal.

Vi ska börja med att definiera vad som ska menas med $a^{\frac{1}{n}}$, där $n > 0$ är ett heltal. Kalla talet för x. Eftersom potenslagarna ska gälla måste vi då ha att

$$x^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{n\frac{1}{n}} = a^1 = a,$$

vilket betyder att x ska vara n:te roten ur a.

Exempel 1 $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Anmärkning Notera att $\sqrt{9} = 3$, *inte* ± 3. Däremot har *ekvationen* $x^2 = 9$ två lösningar, $x = \pm 3$.

Nu måste vi (för att potenslagarna ska gälla) definiera

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m.$$

Anmärkning Vi har bara definierat $a^{\frac{1}{n}}$ om $a > 0$. Men vi kan definiera uttrycket även för $a < 0$ då n är ett udda positivt heltal. Men inte när det är jämnt. T.ex. har vi att $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ medan det inte finns något reellt tal som är $(-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8}$.

Övning 5 Beräkna följande uttryck:

$$a) \quad 4^{1/2}, \quad b) \quad 8^{2/3}, \quad c) \quad 4^{-3/2}, \quad d) \quad (\sqrt{8})^{2/3}, \quad e) \quad 27^{-2/3}.$$

Övning 6 Skriv som potens av a

$$a) \quad \sqrt[3]{a}, \quad b) \quad \sqrt[5]{a^4}, \quad c) \quad \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}, \quad d) \quad \left(\frac{1}{\sqrt[7]{a^9}}\right)^{-1}.$$

Beräkning av a^x för irrationella tal x.

Hur beräknar man t.ex. $2^{\sqrt{2}}$?

Detta kräver gränsövergång och tillgår på följande sätt.

- Först noterar vi att om x, y är två rationella tal så gäller att om $x < y$ så är $a^x < a^y$ om $a > 1$; om $0 < a < 1$ gäller den omvända olikheten.
- Vi approximerar sedan det irrationella talet x med olika rationella tal som närmar sig x (t.ex. ändliga delar av dess decimalutveckling). Sedan gör vi en gränsövergång.

Vi illustrerar processen:

Exempel 2 För att beräkna $2^{\sqrt{2}}$ tar vi en decimalutveckling

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$$

Vi har därför t.ex. att

$$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$$

och de två begränsningstalen är rationella tal. De kan därför beräknas:

$$2^{1.41421} = 2.6651376\ldots > 2.66513, \quad 2^{1.41422} = 2.665160\ldots < 2.66517$$

och vi ser att

$$2.66513 < 2^{\sqrt{2}} < 2.66517.$$

Vi har därmed bestämt fyra decimaler i decimalutvecklingen av $2^{\sqrt{2}}$. Genom att ta med en större del av decimalutvecklingen av $\sqrt{2}$ kan vi få ett bättre närmevärde av $2^{\sqrt{2}}$. En stunds eftertanke visar att det därför måste finnas ett tal $2^{\sqrt{2}}$ och att vi kan bestämma detta tal till den noggranhet vi vill. Problemet med att göra detta strängt matematiskt är att vi behöver en ordentlig definition av vad som menas med reella tal att falla tillbaka på, så vi lämnar detta på det praktiska plan vi befinner oss.

Blandade övningar

Övning 7 Beräkna

$$a)\ \ (2^3)^2 - 2^{3^2}, \quad b)\ \ 3^{2^2} - (3^2)^2, \quad c)\ \ 2^{2^3} - (2^2)^3, \quad d)\ \ 2\cdot 3^2 - (2\cdot 3)^2.$$

Övning 8 Beräkna

$$a)\ \ 4^{-2} - (-3)^{-1}, \quad b)\ \ (\frac{1}{2})^5 + 2^{-4} - \frac{1}{2^3}, \quad c)\ \ (\frac{1}{2})^{-3} - (\frac{1}{4})^{-1} + (\frac{1}{3})^{-2}.$$

Övning 9 Skriv som potens av a

$$a)\ \ a^{1/2}a^{7/4}, \quad b)\ \ \left(a^{4/3}\right)^{1/3}, \quad c)\ \ \sqrt[3]{a\sqrt{a}},$$

$$d)\ \ \sqrt[5]{a}\sqrt[3]{a}, \quad e)\ \ \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}.$$

Övning 10 Beräkna

$$a)\ \ \frac{3^{\frac{1}{6}}(3^{\frac{5}{3}})^2}{(12)^{3/2}} \quad b)\ \ \sqrt{5}\cdot\sqrt{15} + \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}.$$

Övning 11 Visa att $x = 9/4$ löser ekvationen $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$.

Övning 12 Visa att $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2000}$

Övning 13 Förenkla uttrycken

$$a)\ \ (e^x + e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x}, \qquad b)\ \ \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{x+1}}.$$