Relationen mellan potens- och logaritmlagar

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 5)
Anders Källén

Definition av logaritm

Vi börjar med något som inte har med logaritmer att göra.

Exempel 1 Ekvationen $x^2 = 3$ har precis en *positiv* lösning. Den är $x = 1.732\ldots$ där vi kan bestämma hur många decimaler vi vill (talet är irrationellt - kan du bevisa det).

Men så brukar vi inte skriva lösningen. Vad vi gör är att vi inför en speciell symbol för lösningen, nämligen $x = \sqrt{3}$.

Mer allmänt kan vi säga att *den positiva* lösningen till ekvationen $x^2 = y$ betecknas med $\sqrt{y}$.

På samma sätt som $\sqrt{}$ dyker upp i exemplet dyker logaritmer upp när vi tittar på en ekvation

$$a^x = y.$$

Här är $a > 0$ och $y > 0$ är ett givet tal. Det vi söker är talet x (som då blir en funktion av y).

Definition Lösningen på ekvationen $a^x = y$ betecknas med

$$x = {}^a\log y.$$

Exempel 2 Talet $x = {}^3\log(\frac{1}{81})$ är enligt definitionen lösningen på ekvationen:

$$3^x = \frac{1}{81}.$$

Här kan vi skriva högerledet som en potens med basen 3:

$$\frac{1}{81} = \frac{1}{9^2} = (3^2)^{-2} = 3^{-4},$$

vilket betyder precis att

$${}^3\log(\frac{1}{81}) = -4.$$

Anmärkning Vissa logaritmer är viktigare än andra och har fått speciella symboler:

$$\lg x = {}^{10}\log x, \quad \ln x = {}^e\log x,$$

där $e = 2.718\ldots$ är vad som kallas Eulers tal.

Innan du går vidare måste du försäkra dig om att du förstår denna definition. Det gör du genom att göra följande övningar.

Övning 1 Beräkna exakt följande uttryck

$$a)\quad {}^2\log 16, \quad b)\quad {}^3\log(1/9), \quad c)\quad \ln(\sqrt{e}), \quad d)\quad e^{\ln 4}, \quad e)\quad e^{-2\ln 2}.$$

Egenskaper hos logaritmerna, som följer direkt ur definitionen, är:

$${}^a\log 1 = 0, \quad {}^a\log a^x = x, \quad a^{{}^a\log x} = x.$$

Övning 2 Förklara i ord varför dessa påståenden följer direkt ur definitionen.

Logaritmlagarna

Till varje potenslag svarar nu en logaritmlag. Dessa är egentligen helt självklara och det betalar sig att fundera på dem tills de blir, just det, självklara.

Låt oss utgå ifrån potenslagen

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

För att få en motsvarande logaritmlag inför vi beteckningarna

$$u = a^x, \quad v = a^y.$$

Varför? Jo för att då kan vi skriva

$$x = {}^a\log u, \quad y = {}^a\log v.$$

Är du med så långt förstår du nog resten också. Potenslagen kan nu skrivas

$$a^{x+y} = uv.$$

Enligt vår definition innebär det att

$$x + y = {}^a\log(uv).$$

Det vi har här är den ena logaritmlagen:

$${}^a\log(uv) = {}^a\log u + {}^a\log v.$$

Vi brukar skriva den som

$${}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y,$$

men det är bara för att vi föredrar att dessa beteckningar för talen. Det ändrar inte innehållet i formeln.

Motsvarande räkning kan göras för den andra potenslagen:

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Om vi använder beteckningen $u = a^x$ står här $a^{xy} = u^y$, vilket enligt definitionen innebär att

$$xy = {}^a\log(u^y).$$

Men ur detta får vi (tänk efter!)

$${}^a\log(u^y) = y\,{}^a\log u.$$

Vi brukar skriva detta som

$${}^a\log(x^y) = y\,{}^a\log x$$

av samma skäl som ovan.

Anmärkning Potens- och logaritmlagarna är så viktiga att man måste kunna rabbla dem vid hastigt nattligt uppvaknande. Och samtidigt kunna förklara varför den ena följer ur den andra.

Övning 3 Skriv om med hjälp av logaritmlagarna

$$a)\quad \lg a + \lg b + \lg c, \qquad b)\quad \ln e^{-1} + 2\ln\sqrt{e},$$

$$c)\quad {}^5\log 1000 - {}^5\log 40, \qquad d)\quad \ln(a^3 b) - 2\ln\frac{a}{b}.$$

Övning 4 Lös ekvationerna

$$a)\quad 2\lg x - 3\lg 2 = -1, \qquad b)\ \ln x + 2\ln 3 = 5.$$

Varför logaritmer var en revolution när de kom

Logaritmfunktionen uppkom ursprungligen för att förenkla multiplikation. Mer precist: **för att överföra multiplikation på addition**. Man räknade som i nästa exempel:

Exempel 3 Vi ska multiplicera 174 med 35. Man gick då igenom följande steg:

1. Först letade man upp en logaritmtabell och slog upp att
$$\lg 35 = 1.5441 \text{ och att } \lg 174 = 2.2705.$$
2. Sedan adderade man dessa tal:
$$1.5441 + 2.2705 = 3.784 = 3 + 0.784.$$
3. Därefter letade man baklänges i tabellen och såg att $\lg 6.0898 = 0.784$.
4. Efter multiplikation med 1000 fick man slutligen (det lite felaktiga) svaret 6089.8.

Hur mycket fel det blev beror på hur många decimaler som angavs i logaritmtabellen.

Övning 5 Förklara räkningarna ovan med hjälp av logaritmlagarna.

Basbyte för logaritm

Vi har ovan definierat en logaritm-funktion till varje positivt reellt tal. Det är oändligt många, och våra förfäder hade haft problem om de hade behövt göra tabeller för dem alla. Men så är det inte, vi behöver bara en logaritmtabell.

Skälet till detta är enkelt. Vi har ju att $x =^a \log y$ löser ekvationen $a^x = y$. Tag nu en annan bas b. Då kan vi skriva $b = a^z$ där $z =^a \log b$. Men då gäller att

$$y = b^{^b\log y} = (a^z)^{^b\log y} = a^{z \cdot ^b\log y}.$$

Detta betyder precis att $z \cdot {}^b\log y =^a \log y$, och vi har därför att

$${}^b\log y = \frac{^a\log y}{^a\log b}.$$

Så det räcker med en tabell.

Beroende på sammanhang använder man olika logaritmer. Inom informationsbehandling använder man gärna 2-logaritmen (kan du tänka ut varför), medan om man arbetar med stora data använder man gärna 10-logaritmen. Inom analys föredrar vi den naturliga logaritmen $\ln x$ eftersom den har en bekväm derivata.

Blandade övningar

Övning 6 Beräkna exakt

$$a)\quad \lg 1000, \quad b)\quad \lg\sqrt{10}, \quad c)\quad \lg 0.0001, \quad d)\quad 10^{\lg(1000)}, \quad e)\quad 10^{\lg(\pi)}.$$

Övning 7 Förenkla

$$a)\quad \lg\frac{7}{4} + \lg\frac{8}{7}, \qquad b)\quad \frac{1}{2}\ln 100 - 2\ln 2, \qquad c)\quad \lg 36 - 3\lg 6$$

Övning 8 Förenkla

$$a)\quad \ln\frac{1}{x^2} + \ln x^3, \qquad b)\quad \ln e^{2x}, \qquad c)\quad e^{\ln t}, \qquad d)\quad \ln e^x + \ln e^{-x}.$$

Övning 9 Lös följande ekvationer exakt:

$$a)\quad {}^2\log x + {}^2\log 5 = 6, \quad b)\quad {}^2\log(x+1) + {}^2\log(x-1) = 3,$$

$$c)\quad (\ln x)^2 = \ln x^2, \quad d)\quad \sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x}, \quad e)\quad 4^{x^2} = 9^x,$$

$$f)\quad 2\ln x = \ln(x+2).$$

Övning 10 Visa att

$${}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) =^a \log x -^a \log y.$$

Denna formel är bekväm att använda, men följer ur de övriga.

Övning 11 Beräkna ett närmevärde med tre gällande siffror på 2^{63} genom att använda att du vet att $\lg 2 \approx 0.30103$ (ett palindrom!). Du behöver göra en beräkning på en miniräknare för att få det slutliga svaret.

Övning 12 Förenkla uttrycket $e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$.

Övning 13 Två personer har löst en uppgift på olika sätt och fått svaren

$$-\frac{x}{2} + \ln x \text{ respektive } \ln(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1).$$

Måste någon av dem ha fel?

Övning 14 Bestäm alla a, b sådana att

$$\ln(a+b) = \ln a + \ln b.$$