Ekvationslösning

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 6)
Anders Källén

Om ekvivalenser och implikationer

När man löser ekvationer så är viktigt att skriva ut en korrekt logik. För detta ändamål, och för att minimera hur mycket man behöver skriva, har matematiken infört s.k. implikationspilar $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$. I detta arbetsblad ska vi se hur dessa ska användas.

Som introduktion skriver vi ner ett exempel som handlar om ett ekvationssystem.

Exempel 1 Vad innebär logiken i

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-2y &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 2 \\ -3y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} ?$$

Tecknet $\Leftrightarrow$ betyder att det som står till vänster är sant precis då det till höger är sant. Uttrycket $x+y=2$ är ett påstående, eller blir i varje fall om vi tar tal x, y och stoppar in i det. Om vi tar $x=1$ och $y=2$ så står här $3=2$, vilket är ett falskt påstående. Tar vi $x=y=1$ får vi $2=2$, vilket är ett sant påstående.

Längst till vänster har vi två påståenden, $x+y=2,\ x-2y=5$ och den första ekvivalenspilen innebär att dessa två påståendena båda är sanna precis då påståenden i högerledet, $x+y=2\ \ -3y=3$, är sanna, vilka vi ser kräver att $x=3$ och $y=-1$. Detta talpar är därför lösningen på vårt ursprungliga ekvationssystem.

Innebörden av implikationssymbolerna är nu

$A \Leftrightarrow B$**:** Påståendet A är sant precis då påståendet B är sant. Om ett av dem är falskt är alltså även det andra det.
$A \Rightarrow B$**:** Om påståendet A är sant, så måste även påstående B vara sant. Dock gäller att B kan vara sant utan att A är det!
$A \Leftarrow B$**:** Om påståendet B är sant, så måste även påstående A vara sant, alltså detsamma som $B \Rightarrow A$.

Övning 1 Fyll i de logiska symboler som ska ersätta frågetecknen i nedanstående räkning:

$$\sqrt{3-x} = x-1 \quad ? \quad 3-x = (x-1)^2 \quad ?$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \quad ? \quad x = 2 \text{ eller } x = -1.$$

Vilka x löser den första ekvationen?

I det här arbetsbladet ska vi diskutera några olika typekvationer som man måste kunna lösa.

Skriv ut logiken ordentligt i varje lösning!

För din egen skull!

Några viktiga observationer

Övning 2 Lös ekvationerna (skriv ut implikationspilar ordentligt!!!)

$$(a) \quad (x+1)^2 = 256, \qquad (b) \quad (x-1)^2 = 2(x-1).$$

Hur många lösningar fick du till den andra ekvationen? Tänk på att

Du får aldrig dividera med noll

oavsett om du är medveten om att du gör det, eller ej! Inte ens om det står 0 i täljaren (0 kan inte förkortas bort).

Anmärkning Det säkraste sättet att lösa $b)$ är följande:

$$(x-1)^2 = 2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

från vilket resultatet kan avläsas.

Övning 3 Lös ekvationen

$$\frac{3x^2-3}{x-1} = 0.$$

Fick du två lösningar? Tänk efter varför det är fel!

Geometriska problem kan ofta formuleras som ekvationssystem.

Övning 4 Bestäm i vilka punkter den räta linjen $y = 2x+1$ skär kurvan $x^2-2x+y^2+4y-4=0$. Detta är ett ekvationssystem: två villkor ska gälla samtidigt

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2+4y-4 = 0 \\ y = 2x+1 \end{cases} .$$

Lös det!

Variabelbyten

Vissa problem ska lösas i en tvåstegsprocess genom att man i en ekvation först gör ett variabelbyte.

Exempel 2 Vi ska lösa ekvationen

$$4^x - 9 \cdot 2^{x-1} + 2 = 0.$$

Vi har att $4^x = (2^x)^2$ och $2^{x-1} = \frac{1}{2}2^x$ enligt potenslagarna, vilket betyder att x förekommer endast i kombinationen $y = 2^x$. Vi skriver därför ekvationen i y och får

$$y^2 - \frac{9}{2}y + 2 = 0.$$

Men detta är en andragradsekvation som vi kan faktorisera:

$$y^2 - \frac{9}{2}y + 2 = (y-4)(y-\frac{1}{2})$$

(notera att $\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$). Nu har vi bestämt y till att det måste vara antingen 4 eller $1/2$. Det återstår att finna x, d.v.s lösa ekvationerna $2^x = 4$ och $2^x = \frac{1}{2}$. Den första har lösningen $x = 2$, den andra lösningen $x = -1$.

Övning 5 Lös ekvationerna

$$a) \quad x^4 - 2x^2 - 2 = 0, \qquad b) \quad (\ln x)^2 - 9\ln\sqrt{x} + 2 = 0.$$

Rotekvationer

Vi har ovan introducerat ett problem vid lösandet av rotekvationer – att det inte gäller ekvivalens i alla lösningsstegen. Här är ett exempel till.

Exempel 3 Vilka x uppfyller ekvationen $\sqrt{x+5} = x-1$?

Första steget är att få bort $\sqrt{\ }$-tecknet genom att kvadrera ekvationen. Men då gäller inte ekvivalens, utan

$$\sqrt{x+5} = x-1 \quad \Rightarrow \quad x+5 = (x-1)^2.$$

Höger om implikationspilen har vi en andragradsekvation som vi hanterar som vi brukar med dem:

$$x+5=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1-x-5=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-4)=0.$$

Vi har därför lösningarna $x=-1$ och $x=4$ *till andragradsekvationen*.

Men löser de det ursprungliga problemet? Det måste vi kontrollera:

- Med $x=4$ blir den ursprungliga ekvationen $\sqrt{9}=4-1$, alltå $3=3$, vilket är sant.
- med $x=-1$ blir den ursprungliga ekvationen $\sqrt{4}=-1-1$, alltså $2=-2$, vilket *inte* är sant.

Av de två möjliga lösningarna är alltså bara den ena korrekt. Så svaret är $x=4$.

Övning 6 Varför dök lösningen $x=-1$ upp i räkningarna?

Övning 7 Lös ekvationerna

$$a)\ \sqrt{x+2}=x, \quad b)\ \sqrt{x+2}=-x, \quad c)\ x-\sqrt{x-2}=4,$$

Logaritmekvationer

Även när man löser logaritmekvationer måste man tänka på att det som ser ut som ekvivalenta påståenden inte nödvändigtvis är det. Följande exempel illustrerar.

Exempel 4 Vi ska lösa ekvationen

$$\ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln 2.$$

Om vi direkt använder logaritmlagarna skulle detta vara ekvivalent med att

$$\ln(x-2)(x-3)=\ln 2,$$

vilket betyder att vi måste ha

$$(x-2)(x-3)=2 \Leftrightarrow x^2-5x+6=2 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)=0.$$

Lösningarna på ekvationen skulle alltså vara $x=4$ och $x=1$.

Men om vi kontrollerar lösningarna (vilket man alltid ska göra om det går) ser vi att för $x=4$ får vi $\ln 2+\ln 1=\ln 2$, vilket är sant eftersom $\ln 1=0$, men för $x=1$ får vi i vänsterledet $\ln(-1)+\ln(-2)$, och *logaritmfunktionerna är endast definierad för positiva argument*. $x=1$ är alltså inte ett tillåtet värde.

Däremot är $x=1$ ett tillåtet (och korrekt) värde för ekvationen $\ln(x-2)(x-3)=\ln 2$, eftersom $(-1)(-2)=2$. Vi ser att när vi satt ihop logaritmerna får vi ett argument som är definierat för fler x än ursprungsekvationen. Vi har alltså endast att

$$\ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln 2 \quad \Rightarrow \quad \ln(x-2)(x-3)=\ln 2,$$

men inte ekvivalens. Precis som för rotekvationen.

Övning 8 Lös följande logaritmfunktioner

$$a)\quad 2\ln x=\ln(x+2), \quad b)\quad {}^2\log(x+1)+{}^2\log(x-1)=3.$$

Ekvationssystem

I flerdim är det viktigt att man kan lösa enklare ekvationssystem. Linjära sådana avhandlas i kursen i linjär algebra, men det finns även andra system som man måste kunna hantera. I vissa fall handlar det om att faktorisera ekvationerna och sedan identifiera ett antal fall.

Exempel 5 Vi vill hitta alla x,y som löser systemet

$$\begin{cases} 2xe^{-x^2-y^2}-x^3e^{-x^2-y^2}+xy^2e^{-x^2-y^2} & =0 \\ -2y-x^2y+y^3 & =0 \end{cases}.$$

Första steget är då att faktorisera alla ingående ekvationer så långt man kan. I vårt fall blir detta

$$\begin{cases} x(2-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} & =0 \\ -y(2+x^2-y^2) & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x^2+y^2) & =0 \\ y(2+x^2-y^2) & =0 \end{cases}.$$

(Det är viktigt att dividera bort faktorer som aldrig kan bli noll - de är bara störningsmoment.) Men detta kan också skrivas som

$$\begin{cases} x=0 \text{ eller } x^2-y^2=2 \\ y=0 \text{ eller } x^2-y^2=-2 \end{cases}$$

Detta steg är viktigt. Tänk igenom det ordentligt, för nu ska vi konstatera att ur detta kommer fyra fall vilka ska lösas var för sig:

Fall I: $x=0$ och $y=0$, vilket ger den enda lösningen $(0,0)$.
Fall II: $x=0$ och $x^2-y^2=-2$ vilket är ekvivalent med att $x=0$ och $y^2=2$. Det finns därför två lösningar till detta, $(0,\pm\sqrt{2})$.
Fall III: $x^2-y^2=2$ och $y=0$, vilket är ekvivalent med $x^2=2$ och $y=0$, alltså lösningarna $(\pm\sqrt{2},0)$.
Fall IV: $x^2-y^2=2$ och $x^2-y^2=-2$. Men detta kan naturligtvis inte hända (varför?), så det systemet saknar lösningar.

Vi ser att vårt ursprungliga system har lösningarna

$$(0,0),\ (\pm\sqrt{2},0),\ (0,\pm\sqrt{2}).$$

Övning 9 Lös ekvationssystemet

$$a)\quad \begin{cases} x-(x^2+3y^2)x=0 \\ 3y-(x^2+3y^2)y=0. \end{cases}, \quad b)\quad \begin{cases} 2x+(y^2-1)=0 \\ 2xy=0. \end{cases}.$$

Blandade uppgifter

Övning 10 Lös följande ekvationer

$$a)\ \sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}, \quad b)\ \sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+1}, \quad c)\ \sqrt{x+2}=\sqrt{x}$$

Övning 11 Lös ekvationerna

$$a)\ \sqrt{x-2}\sqrt{x+3}=x, \quad b)\ (3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})=8\sqrt{x},$$

$$c)\ \sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x}}+\sqrt{3+x}.$$

Övning 12 Lös ekvationerna

$$a)\quad 9^x+6\cdot 3^x=7, \qquad b)\quad 2^x\cdot 3^{x-2}=4$$

Övning 13 Lös ekvationerna

$$a)\quad 3^x+2\cdot 3^{x+1}=21,\ b)\quad 3\cdot 2^{x+1}-2^x=40\sqrt{2},$$

$$c)\quad e^{2x}+e^x-2=0, \quad d)\quad 2\cdot 100^x-10^x=6.$$

Övning 14 Lös följande logaritmekvationer

$$a)\ 3\ln(x+1)-\ln x^3=6\ln 4, \qquad b)\ \ln(x-2)+\ln x=3\ln 2$$

$$c)\ \ln(x+1)+\ln(2-x)=\ln(x-1)^2,\ d)\ \lg(3x)+\lg(x+1)=2\lg(x-1).$$

Övning 15 Lös ekvationen

$$\frac{\lg(4x^2+7)}{\lg(2x-1)} = 2.$$

Övning 16 Lös ekvationerna

$a)\quad \ln x + \ln(x-1) = \ln 6, \qquad b)\quad 2\ln(x-4) = \ln x + \ln 2,$

$c)\quad \ln(3^x + 3^{x+1}) = 1.$

Övning 17 Lös ekvationssystemen

$$a)\quad \begin{cases} 2xy = 2x^3y \\ x^2 - 4x^2y^2 = 0. \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} 6xy^2 = 6x^2y \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Övning 18 Lös ekvationssystemen

$$a)\quad \begin{cases} 2xy - 3y + 2 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} 2x + y^2 - 1 = \lambda x \\ 2xy = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

(I b) har vi tre obekanta: x, y, λ).