

Olikheter

Olikheter är ibland lite luriga, och detta arbetsblad handlar om en speciell typ av olikheter som involverar rationella funktioner (kvoter av polynom) där vi kan faktorisera både täljare och nämnare. Gör som uppvärmning följande övning:

Övning 1 Lös följande olikheter

$$a) \quad 3x - 1 \leq 5, \quad b) \quad 1 - 6(x - 2) \geq 3(x + 1).$$

Skriv ordentliga lösningar med implikationspilar i varje lösningssteg!

Teckentabeller

När man ska lösa vissa olikheter är det lämpligt att göra om problemet till en teckenanalys. Följande exempel illustrerar detta.

Exempel 1 Bestäm alla x som uppfyller olikheten

$$4 \leq (x + 1)(x - 2).$$

I stället för att jämföra med talet 4 vill vi här jämföra med 0, så vi flyttar över 4:an till högerledet och faktorerar sedan högerledet:

$$4 \leq (x + 1)(x - 2) \Leftrightarrow 0 \leq (x^2 - x - 2) - 4 = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Vår olikhet är alltså ekvivalent med olikheten $(x - 3)(x + 2) \geq 0$, och denna löser vi enklast med en teckentabell i vilken vi i första raden gjort en indelning av x -axeln efter var vänsterledet är noll:

x :	-2	3		
$x + 2$:	-	0	+	+
$x - 3$:	-	-	-	0
$(x - 3)(x + 2)$:	+	0	-	0

Vi ser att produkten är positiv då $x < -2$ eller $x > 3$, noll då $x = -2$ eller $x = 3$ och negativ då $-2 < x < 3$. Svaret är alltså $x \leq -2$ eller $x \geq 3$.

Övning 2 Bestäm de x som uppfyller följande olikheter

$$a) \quad (2x + 1)(3x - 1) < 0, \quad b) \quad 6x^2 + x - 1 < 0, \quad c) \quad x^2 + 1 > 2x$$

När man ska lösa olikheter så är det en sak som är väldigt viktig att tänka på:

Om man multiplicerar ett negativt tal över en olikhet måste man vända olikheten!

Exempel 2 Vi ska bestämma de x som uppfyller $\frac{2}{x} \leq x + 1$.

Notera först att vi inte får dividera med noll, så vi kräver att $x \neq 0$.

Sedan är det frestande att multiplicera upp x och få olikheten $2 \leq x(x + 1)$ för att sedan fortsätta som i föregående exempel:

$$2 \leq x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \geq 0$$

och sedan följa upp med en teckentabell som ovan. Det skulle ge svaret $x \geq 1$ eller $x \leq -2$.

Men detta är fel!

Felet vi gjort är att vi inte tänkt på det som poängterades innan exemplet: man får inte multiplicera ett negativt tal över en olikhet utan att ändra olikheten. Detta är ofta småknepig att hålla reda på (om det man multiplicerar med är säkert positivt är det inget problem), och därför är det ofta bättre att istället flytta över allt på ena sidan och jämföra med noll:

$$\frac{2}{x} \leq x + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x + 1 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x(x + 1) - 2}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x - 1)(x + 2)}{x}.$$

Vi gör nu en teckentabell där vi tar hänsyn till både täljarens och nämnarens nollställen:

x :	-2	0	1	
x :	-	-	0	+
$x + 2$:	-	0	+	+
$x - 1$:	-	-	-	0
$\frac{(x - 1)(x + 2)}{x}$:	-	0	+	+

Här betecknar \dagger att uttrycket inte är definierat eftersom vi inte får dividera med 0. Sammanfattar vi resultatet ser vi att

$$\frac{2}{x} \leq x + 1 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \text{ eller } x \geq 1.$$

(Inte samma som med den felaktiga metoden ovan!)

Övning 3 Lös följande olikheter

$$a) \quad \frac{x - 1}{x - 2} \leq 0 \quad b) \quad \frac{4x}{x + 1} \leq x^2 - 2x.$$

Ibland har man flera olikheter att hantera samtidigt. Det är då ofta klokt att lösa dem var för sig för att efteråt kombinera lösningarna till ett svar som löser den ursprungliga uppgiften. Följande exempel illustrerar detta.

Exempel 3 Bestäm alla x som uppfyller

$$x + 4 \leq x^2 + 2 < 2x + 3.$$

Vi har här två olikheter

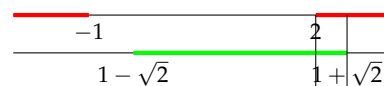
$$1. \quad x + 4 \leq x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq (x + 1)(x - 2) \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ eller } x \geq 2.$$

$$2. \quad x^2 + 2 < 2x + 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Båda villkoren ska vara uppfyllda, vilket ger att lösningen ges av

$$2 \leq x < 1 + \sqrt{2}.$$

För att se det kan det vara bra att rita en figur:



Blandade övningar

Övning 4 Bestäm för var och en av olikheterna nedan vilka x som uppfyller dem:

$$a) \quad x^2 > (x + 2)^2, \quad b) \quad 3x^2 \leq 2x, \quad c) \quad x^2 + x \geq 2,$$

$$d) \quad x^3 + 6 < 2x^2 + 5x, \quad e) \quad (x - 3)(x + 3) \leq x^2.$$

Övning 5 För vilka x gäller följande olikheter?

$$a) \frac{x+1}{x} \geq 3, \quad b) \frac{2x-1}{x-2} \leq 3, \quad c) \frac{1}{x} \geq 2x-1.$$

Övning 6 Lös följande olikheter

$$a) x^2 < 4, \quad b) x^2 > 5, \quad c) \frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1, \quad d) x + \frac{4}{x} > 5.$$

Övning 7 Bestäm de x för vilka det både gäller att $x^2 \geq 2$ och att $x^2 + x - 2 > 0$.