Absolutbelopp

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 8)
Anders Källén

Absolutbelopp och avstånd

Låt P, Q vara två punkter. Det spelar ingen roll om det är på en linje, i planet eller i rummet (eller hyperrymden). Vi definierar

$$|P - Q| = \text{ avståndet mellan } P \text{ och } Q.$$

Betydelsen av detta varierar med var punkterna ligger.

Exempel 1 För reella tal betyder detta att vi har

$$|5-3| = 2, \qquad |3-5| = 2.$$

I detta fall skriver vi också

$$|x| = |x-0| = \text{avståndet från } x \text{ till } 0.$$

Exempel 2 För en punkter i planet får vi t.ex.

$$|(2,3)-(1,1)| = \sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Detta kräver att vi använder Pytagoras' sats! Även här skriver vi

$$|(x,y)| = |(x,y)-(0,0)|$$

som alltså är avståndet från (x,y) till origo i planet.

Exempel 3 För en punkt i rummet får vi t.ex. (igen genom att använda Pytagoras' sats)

$$|(2,3,4)-(1,1,1)| = \sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(4-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Kan du rita en figur som övertygar dig om att detta verkligen är avståndet mellan punkterna?

Anmärkning Notera att avstånd aldrig kan vara negativa!

Övning 1 Bestäm

$$a)\quad |3|, \qquad b)\quad |-3|, \qquad c)\quad |5-6|, \qquad d)\quad |-3-9|.$$

Övning 2 Bestäm

$$a)\quad |(2,3)|, \qquad b)\quad |(2,3)-(6,5)|, \qquad c)\quad |(-4,-2,1)-(1,0,-1)|.$$

Med hjälp av absolutbeloppet kan vi ge enkla formler för alla punkter som har samma avstånd till en given punkt.

1. Alla punkter x på reella linjen som har avståndet r till punkten a ges av ekvationen $|x-a| = r$. Detta blir de två punkterna $a-r, a+r$.
2. Alla punkter (x,y) i planet som har avståndet r till punkten (a,b) ges av ekvationen

$$|(x,y)-(a,b)| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

   Detta är därför ekvationen för en cirkel med medelpunkt i (a,b) och radien r.
3. Alla punkter (x,y,z) i rummet som har avståndet r till punkten (a,b,c) ges av ekvationen

$$|(x,y,z)-(a,b,c)| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2.$$

   Detta är ekvationen för en sfär med medelpunkt i punkten (a,b,c) och radien r.

Övning 3 Lös ekvationerna

$$a)\quad |x-1| = 2, \quad b)\quad |x+5| = \sqrt{2}, \quad c)\quad |2-x| = 1, \quad d)\quad |3x-5| = 1.$$

Övning 4 Ange, utan att använda absolutbelopp, de x som löser följande oliheter:

$$a)\ |x-1| < 2, \quad b)\ |x+5| > \sqrt{2}, \quad c)\ |2-x| < 1, \quad d)\ 1 < |3x-5| < 3.$$

Övning 5 Skriv olikheterna $7/3 \leq x \leq 15/3$ på formen $|x-a| \leq b$.

Tänker vi nu efter så ska vi kunna inse att för ett reellt tal x gäller att

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

T.ex. gäller att $|-3| = -(-3) = 3$.

Ekvationer med ett absolutbelopp

En funktion som innehåller ett eller flera absolutbelopp behöver ofta skrivas utan dessa, och då tvingas man dela upp i olika fall.

Exempel 4 Vi ska skriva funktionen $f(x) = x + |x-1|$ utan att använda absolutbelopp. Det första vi observerar är då att $|x-1|$ blir olika om $x > 1$ eller $x < 1$:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{om } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{om } x < 1 \end{cases}.$$

Ur det följer då att

$$f(x) = \begin{cases} x+(x-1) & \text{om } x \geq 1 \\ x-(x-1) & \text{om } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{om } x \geq 1 \\ 1 & \text{om } x < 1 \end{cases}.$$

Övning 6 Rita följande kurvor genom att först bestämma högerledet i olika delintervall:

$$a)\quad y = |x-1|, \quad b)\quad y = |x+5|, \quad c)\quad y = |2-x|, \quad d)\quad y = |3x-5|.$$

Ekvationer med flera absolutbelopp

När en ett uttryck innehåller flera absolutbelopp måste man dela upp i flera fall.

Exempel 5 Vi ska lösa ekvationen

$$|x+3| + |2x-1| = 4.$$

Det första vi observerar är då att

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & x \geq -3 \\ -(x+3) & x < -3 \end{cases}, \quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

(Tänk igenom detta noga! Det är nyckeln till att kunna lösa uppgiften.) Vi delar nu in x-axeln i tre delar och skriver upp vilket uttryck vi har i var och ett av områdena. Sedan löser vi dessa ekvationer:

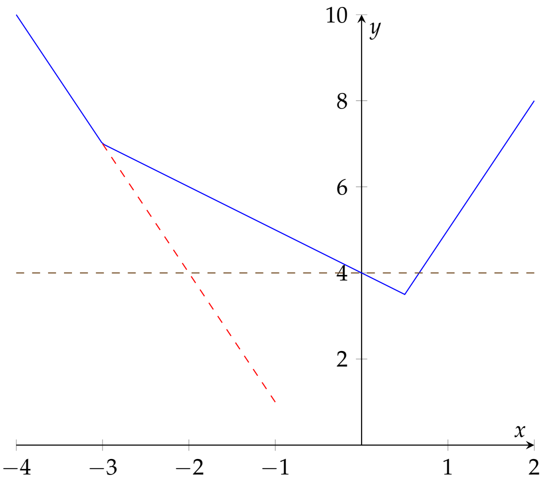
$x < -3$	$-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$-(x+3)-(2x-1)=4$ $\Leftrightarrow$ $-3x = 6 \Leftrightarrow x = -2$	$x+3-(2x-1)=4$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$	$x+3+2x-1=4$ $\Leftrightarrow$ $3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
Falsk ty $-2 > -3$	Sann	Sann

Sista raden är här viktig! När vi har fått fram lösningen i varje område måste vi kontrollera om den verkligen ligger i området. Svaret är alltså att den ursprungliga ekvationen löses av $x = 0$ och $x = 2/3$.

För att förstå detta hjälper möjligen figuren nedan till. Den föreställer kurvan $y = |x+3| + |2x-1|$ över ett relevant intervall. Den är ritad genom att vi använder räkningarna ovan till att se att

$$y = \begin{cases} -3x-2, & x < -3 \\ -x+4, & -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3x+2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

I varje intervall ska vi alltså rita en rät linje. Detta är den blå kurvan i figuren nedan.



Här ser man först att de två sanna lösningarna är de punkter där den blå kurvan skär den streckade horisontella linjen $y = 4$. Den falska roten uppkommer genom att vi extrapolerar (drar ut) linjen $y = -3x - 2$ (vilket är vad högerledet är då $x < -3$). Vi ser att den extrapolerade linjen når nivån 4 i punkten $x = -2$.

Övning 7 Lös följande ekvationer:

$$a)\quad 2x - |x| = 6, \qquad b)\quad |x+1| + |x-2| = 6$$

$$c)\quad |2x-1| + |2x+1| = 4, \qquad d)\quad 4|3x-1| + |6x+3| = 6$$

Övning 8 Rita följande kurvor

$$a)\quad y = 2x - |x|, \qquad b)\quad y = |x+1| + |x-2|$$

$$c)\quad y = |2x-1| + |2x+1|, \qquad d)\quad y = 4|3x-1| + |6x+3|$$

och markera lösningarna i figuren till motsvarande problem i föregående övning.

Olikheter med absolutbelopp

Att undersöka olikheter som innehåller absolutbelopp innebär inget nytt som följande exempel visar:

Exempel 6 Vi ska bestämma alla reella tal x som uppfyller

$$|x^2 - 2| + x > 0.$$

Först måste vi dela upp i fall, och dessa bestäms av när det som står innanför absolutbeloppen är noll: i det här fallet $x^2 - 2 = 0$. Det gör att vi har två fall: $x^2 \geq 2$ och $x^2 < 2$. Vi tar dem var för sig:

$x^2 \geq 2$: I det fallet får vi

$$x^2 - 2 + x > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0.$$

Denna olikhet kräver $x < -2$ eller $x > 1$, och eftersom dessutom $x^2 \geq 2$ så gäller totalt att

$$x < -2 \ \text{ eller } \ x \geq \sqrt{2}.$$

$x^2 < 2$: I det fallet får vi

$$-(x^2 - 2) + x > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) < 0,$$

vilket är sant om $-1 < x < 2$. Men dessutom ska $x^2 < 2$, varför vi ser att detta villkor är uppfyllt om

$$-1 < x < \sqrt{2}.$$

Sätter vi samma dessa villkor får vi att olikheten är uppfylld omm

$$x < -2 \ \text{ eller } \ x > -1.$$

Övning 9 Bestäm de x som uppfyller

$$|x^2 - 2| + |x| > 4.$$

Blandade övningar

Övning 10 Bestäm alla reella tal x som uppfyller

$$a)\quad |x+2| \leq 3 \text{ och } |x-1| < 4, \qquad b)\quad |x+1| \geq 5 \text{ och } |x+4| \leq 2.$$

Övning 11 *a*) Hur långt ifrån origo ligger punkten $(-3, 6)$?
b) Vilken omkrets har en triangel vars hörn finns i punkterna $(-1, -1), (4, 2)$ och $(2, 4)$.

Övning 12 Bestäm de x som uppfyller

$$|x^2 - 2| + |x| > 2.$$