Analytisk geometri (basalia)

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 9)
Anders Källén

Den räta linjen

En rät linje i planet som går genom origo har, med ett undantag, ekvationen

$$y = kx.$$

k kallas riktningskoefficienten och bestäms genom att vi anger en punkt förutom origo som kurvan går igenom.

Exempel 1 Ange ekvationen för den räta linje som går igenom origo samt punkten $(3, 2)$. För detta stoppar vi bara in punkten i ekvationen: $3 = k \cdot 2$, vilket ger att $k = 3/2$ och alltså linjens ekvation till $y = \frac{3}{2}x$. Denna ekvation kan också skrivas $2y - 3x = 0$.

Den räta linje som inte kan skrivas på detta sätt är y-axeln, vilken istället har ekvationen $x = 0$.

En rät linje i planet bestäms normalt av

1. en punkt (x_0, y_0) som den går igenom
2. sin riktningskoefficient k.

Undantagen till denna regel är de vertikala linjerna som har ekvationer $x = x_0$.

Det betyder att en icke-vertikal rät linje består av alla punkter (x, y) sådana att

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{(Enpunktsformeln).}$$

Generellt ser vi att en (icke-vertikal) rät linje kan skrivas på formen $y = kx + m$ för konstanter k, m. Här är k linjens riktningskoefficient och m dess skärning med y-axeln.

Exempel 2 Bestäm den räta linje som går genom punkterna $(1, 2)$ och $(2, 5)$. Vi kan ange riktningskoefficienten på två sätt:

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{5-2}{2-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-2}{x-1} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 1.$$

Anmärkning Detta är egentligen tvåpunktsformeln, men gjort utan att man använder någon formel (annat än den grundläggande karakteriseringen av en rät linje).

Anmärkning Linjen $y = y_0 + k(x - x_0)$ är den linje vi får om vi parallellförflyttar linjen $y = kx$ så att origo svarar mot (x_0, y_0). Det tankesättet kommer att dyka upp igen i detta arbetsblad.

För att få med alla räta linjer i en formel kan vi skriva deras ekvation som $ax + by + c = 0$ (någon av a, b måste vara $\neq 0$). Om $b \neq 0$ kan vi dividera med b och få $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, så vi får formen $y = kx + m$ om vi tar $k = -a/b$, $m = -c/b$. Om $b = 0$ har vi ekvationen $ax + c = 0$ och alltså $x = -c/a$.

Övning 1 Bestäm på formen $ax + by + c = 0$ ekvationen för den räta linje som går genom

a) origo med riktningskoefficienten $-2/5$,
b) $(1, -3)$ med riktningskoefficient $1/2$,
c) $(-1, 2)$ parallell med x-axeln
d) punkterna $(2, 1)$ och $(1, 3)$,
e) punkterna $(-1, 2)$ och $(-1, -4)$.

Övning 2 Bestäm skärningspunkten mellan de två linjerna

a) $x + 2y + 4 = 0$ och $2x + y = 0$,
b) $5x - 3y + 4 = 0$ och $3x + 2y - 9 = 0$,
c) $2x + 3y - 3 = 0$ och $x + \frac{3}{2}y - 4 = 0$.

Som är känt från gymnasiet gäller att normalen till en linje med riktningskoefficient k har en riktningskoefficient k_1 som är sådan att $k_1 k = -1$.

Övning 3 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

a) $y = 2x + 3$ i punkten $(1, 5)$,
b) $4x - 3y + 6 = 0$ i punkten $(0, 2)$.

Parabeln

En parabel utgår ifrån kurvan $y = kx^2$. Om den kan vi säga att

1. den har sin lägsta punkt i origo,
2. den är symmetrisk kring y-axeln (y-axeln är dess symmetrilinje).

Varje kurva som kan fås genom att parallellförflytta och/eller rotera en sådan kurva kallas en parabel.

Exempel 3 Om vi parallellförflyttar $y = kx^2$ så att origo hamnar i punkten (x_0, y_0) så får vi en parabel som beskrivs av ekvationen $y - y_0 = k(x - x_0)^2$. Den har sin lägsta punkt i (x_0, y_0) och har som symmetriaxel linjen $x = x_0$.

Exempel 4 Ekvationen $y^2 = x$ definierar en parabel, ty den kurvan är uppkommen genom att vi roterar kurvan $y = x^2$ ett kvarts varv medurs. Lägg märke till att kurvan $y^2 = x$ består av de två kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = -\sqrt{x}$.

Övning 4 Visa att kurvan $y = x^2 + 8x - 12$ är en parabel och skissera den.

Cirkeln

I två dimensioner gäller att $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Det betyder att cirkeln med medelpunkt i origo och radien 1 kan skrivas $|(x, y)| = 1$, vilket blir detsamma som $x^2 + y^2 = 1$. Denna cirkel kallas enhetscirkeln.

Exempel 5 Vad beskriver ekvationen

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4?$$

Vi kan skriva om den som $|(x - 3, y + 2)| = 2$, vilket i sin tur kan skrivas om som $|(x, y) - (3, -2)| = 2$. Här står att vi söker alla punkter (x, y) vars avstånd till punkten $(3, -2)$ är 2. Det är alltså en cirkel med medelpunkt i $(3, -2)$ och radien 2.

Tänk på cirkeln på detta sätt!

Anmärkning Cirkeln i exemplet kan sägas ha uppkommit genom att vi har (parallell-)förflyttat cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ så att dess medelpunkt ligger i punkten $(3, -2)$.

Övning 5 Ge en ekvation för cirkeln med följande medelpunkt och radie

a) $(2, 3)$ respektive 4,
b) $(-3, -4)$ respektive $\sqrt{3}$.

Övning 6 Beskriv den kurva som ges av ekvationen

a) $x^2 - 4x + y^2 + 5y = 2$,
b) $x^2 + 4x + y^2 = 0$,
c) $3x^2 + 3y^2 + 9x - y = 0$.

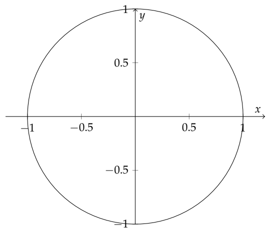
En viktig sak att veta om en cirkel är att

Tangenten till en cirkel i en punkt är vinkelrät mot radien!

Övning 7 Bestäm ekvationen för tangenten till enhetscirkeln i punkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

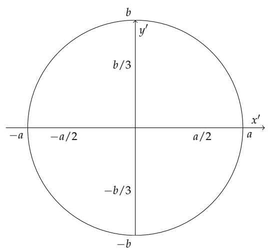
Ellipsen

En ellips är en "tillplattad cirkel". Fast tillplattad på ett speciellt sätt. För att förstå hur, rita upp den vanliga enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i ett vanligt koordinatsystem.

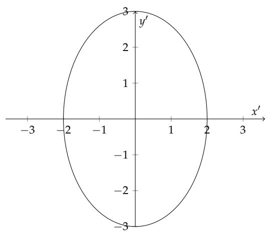


Sedan mäter vi axlarna i nya skalor (som att gå från mm till tum). Det betyder att vi gör variabelbyten $x' = ax$, $y' = bx$. Här är alltså x', y' nya mätetal för samma längder. I dessa blir ekvationen för enhetscirkeln

$$(\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 = 1.$$



Så här långt har inte figuren ändrat sig. Men nu ritar vi om figuren som ett "vanligt" koordinatsystem i de nya mätenheterna. Då förändras formen på cirkeln till en ellips. (I figuren är $a = 2$ och $b = 3$.)



Om vi släpper ′:en på variablerna får vi ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

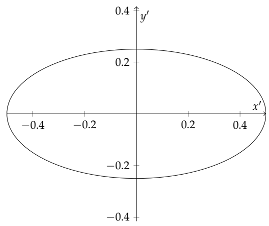
för en ellips vars medelpunkt ligger i origo. Vi ser att den skär x-axeln i $x = \pm a$ och y-axeln i $y = \pm b$. Man kallar talen a, b för längden av ellipsens halvaxlar (eller slarvigare, ellipsens halvaxlar).

Exempel 6 Rita ellipsen $12x^2 + 48y^2 = 3$. Vi vet att det är en ellips, så det räcker med att vi tar reda på var den skär koordinataxlarna:

$$x\text{-axeln} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2},$$

$$y\text{-axeln} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 48y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{4}.$$

Vi ser alltså att ekvationen beskriver en ellips med medelpunkt i origo och halvaxlarna $1/2$ och $1/4$.



Övning 8 Rita upp ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Vi kan naturligtvis parallellförlytta även ellipser. Om vi flyttar ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ så att dess medelpunkt ligger i punkten (x_0, y_0) i stället för origo, så får den ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Övning 9 Rita kurvan $x^2/4 - x/2 + y^2/9 - 3/4 = 0$.

Övning 10 Vilka av följande kurvor är ellipser? Om det är en ellips, beskriv den i ord.

a) $2x^2 - 4x + y^2 + 5y = 2$,
b) $2x^2 + 4x - y^2 = 0$,
c) $x^2 - 4y = 36$.

Hyperbeln

Vad får vi för kurva om vi ersätter ett plus framför en kvadrat i ellipsens ekvation med ett minustecken? (Varför kan vi inte ersätta båda med minustecken?) Vi utgår ifrån enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

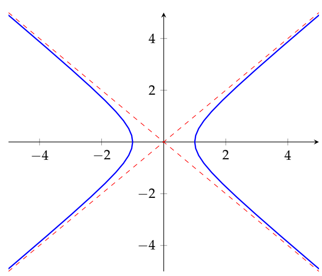
Exempel 7 Vi börjar med att sätta minustecknet framför y^2 och vill alltså skissera kurvan $x^2 - y^2 = 1$.

Man kan då börja med att rita ut två hjälplinjer, vilka vi får genom att ersätta 1:an i högerledet med 0:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ eller } y = -x.$$

Dessa hjälplinjer kallas asymptoter till kurvan av skäl som snart ska framgå.

Sedan konstaterar vi att det minsta värdet x^2 kan anta är 1 (varför? tänk noga igenom detta), så om (x, y) ligger på kurvan gäller att antingen är $x \le -1$ eller $x \ge 1$. Kurvan består därför av två bitar som måste vara varandras spegelbilder i y-axeln eftersom ekvationen inte ändras om vi byter x mot $-x$. Dessutom är kurvan symmetrisk i x-axeln, eftersom inget händer om vi byter $-y$ mot y. Om vi därför kan rita ut kurvan i första kvadranten så får hela vi kurvan genom att spegla i olika axlar.



Men i första kvadranten kan vi lösa ut y till $y = \sqrt{x^2 - 1}$, så vi ser att om vi ökar x, ökar y och när $x > 0$ är stor blir $y = \sqrt{x^2 - 1} \approx \sqrt{x^2} = x$. Kurvan närmar sig därför hjälplinjen $y = x$. Därför kallas hjälplinjerna för kurvans asymptoter. Figuren ovan illustrerar hela kurvan med sina asymptoter.

Övning 11 Skissera hyperbeln $y^2 - x^2 = 1$. Det mesta av analysen är som i föregående exempel. Var ligger skillnaderna?

Om vi parallellförflyttar någon av dessa kurvor så att origo hamnar i (x_0, y_0) så får vi ekvationer på formen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1.$$

För att skissera dem gör vi som ovan:

1. Först bestämmer vi asymptoterna genom att sätta högerledet till noll.
2. Sedan avgör vi vilken av axlarna kurvan skär och bestämmer skärningspunkten.
3. Dessa två bitar information räcker för att skissera hyperbeln.

Övning 12 Skissera kurvan

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Blandade övningar

Övning 13 Farenheits temperaturskala sätter vattnets fryspunkt till 32°F och vattnets kokpunkt till 212°F. Celsiusskala sätter som bekant den förra till 0°C och den senare till 100°C. Finns det någon temperatur där de två skalorna ger samma mätetal?

Övning 14 Ligger följande tre punkter i planet på en rät linje?

$a)\quad (-6,5),\ (-2,2),\ (10,8), \qquad b)\quad (-7,-5),\ (3,1),\ (8,4).$

Övning 15 Skissera följande parabler:

a) $x = y^2 + 8y - 12,$
b) $x^2 + 6x + 4y = 36.$

Ange speciellt deras symmetriaxlar.

Övning 16 Bestäm a och b så att kurvan $y = x^2 + ax + b$ går genom punkterna $(-1, 6)$ och $(2, 3)$.

Övning 17 Bestämma skärningen mellan parabeln $y = x^2 + 8x - 12$ och linjen $y = 2x + 4$.

Övning 18 Vilken kurva beskrivs av ekvationen

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0?$$

I vilka punkter skär denna kurva den räta linjen $y = 2x + 1$?

Övning 19 Bestäm möjliga värden på talet a så att cirkeln $x^2 - ax + y^2 + 2y = a$ får radien 2.

Övning 20 Bestäm medelpunkt och radie för cirkeln $x^2 + y^2 + 2(2x - y) = 4$.

Övning 21 Bestäm medelpunkt och halvaxlar för ellipserna

$a)\quad 2x^2 + (y-1)^2 = 1, \qquad b)\quad 2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0.$

Övning 22 Beskriv de områden i planet som ges av följande olikheter:

a) $x^2 - 4x + y^2 + 5y \le 2,$
b) $x^2 + 4x + y^2 > 0,$
c) $3x^2 + 3y^2 + 9x - y < 0.$

Övning 23 Bestäm medelpunkt och asymptoter till hyperbeln $y^2 + 2y - 4x^2 = 0$. Ange även skärningarna med aktuell koordinataxel.

Övning 24 Rita kurvorna

$a)\quad x^2 - y^2 + 4x - 2y = -2, \qquad b)\quad x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1,$

$c)\quad y^2 - 2x - 4y + 2 = 0, \qquad d)\quad x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0.$

Övning 25 Bestäm skärningen mellan cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ och linjen $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Övning 26 Bestäm alla skärningspunkter mellan hyperbeln $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y = 3$ och den räta linjen genom punkterna $(-1, 1)$ och $(2, 4)$.

Övning 27 Bestäm *antalet* lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} (2x+3y+1)(8y-12x) & = 0 \\ \qquad\qquad x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$$