Trigonometriska funktioner

Repetitionsmaterial (Arbetsblad 10)
Anders Källén

Vinkelmätning

Vinklar mäter vridningar och kan mätas i på olika sätt, beroende av hur vi beskriva vridning ett helt varv.

- Den klassiska mätstorheten är grader, där vi säger att ett helt var är $360°$.
- Inom analysen vill vi istället beskriva vridning med hur långt vi rör oss längs enhetscirkeln under vridningen, vilket betyder att ett helt varv ska vara 2π. Denna enhet kallas radianer, men det skriver vi sällan ut.

Sambandet mellan grader och radianer är alltså att 1 varv = $360° = 2\pi$ radianer. Från det kan vi lätt översätta en viss vinkel från det ena till det andra:

Exempel 1 2/3 varv svarar mot vinkeln $\frac{2}{3} \cdot 360 = 240$ grader och $\frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}$ radianer. $60°$ svarar mot $\frac{60}{360} 2\pi = \frac{\pi}{3}$ radianer, medan $\frac{\pi}{4}$ radianer svarar mot

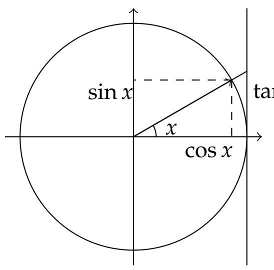
$$\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} \cdot 360 = \frac{360}{8} = 45 \text{ grader.}$$

Övning 1 Omvandla $75°$ och $210°$ till radianer.

Övning 2 Omvandla $\pi/6$ och $23\pi/12$ radianer till grader.

Definition av de trigonometriska funktionerna

De trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens definieras bäst med hjälp av enhetscirkeln. Då får vi en definition av dem som fungerar för alla vinklar. Deras definition framgår av figuren nedan.



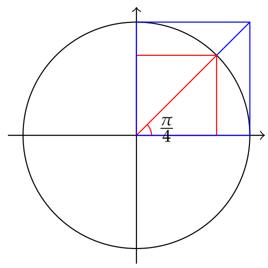
Detta definierar $\sin x$ och $\cos x$ för alla vinklar $0 \leq x \leq 2\pi$, men bara $\tan x$ då $-\pi/2 < x < \pi/2$ Notera att tangens inte är definierad i $x = \pm\pi/2$!

Övning 3 För vilka x är $\sin x < 0$? När är $\cos x < 0$ och när är $\tan x < 0$.

För att få funktionerna i andra punkter än dessa använder vi att sinus och cosinus är 2π-periodiska, medan tangens är π-periodisk.

När man ska bestämma värdena på de trigonometriska funktionerna för olika vinklar kan man ibland använda sig speciella trianglar. De klassiska vinklarna i detta sammanhang är $30°, 45°$ och $60°$. Följande exempel *skisserar* hur man går tillväga.

Exempel 2 För att bestämma $\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}$ och $\tan \frac{\pi}{4}$ ritar vi ut vinkeln i enhetscirkeln.

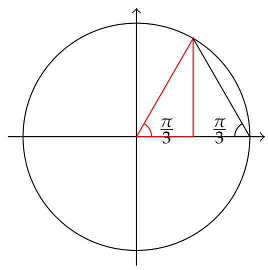


Vi ser då att motsvarande radie kommer att vara diagonal i en kvadrat, vars sida är $1/\sqrt{2}$. Det betyder att

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vidare, om vi fortsätter radien ut till den vertikala linjen, så får vi en diagonal i en kvadrat med sidan 1. Det följer att $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Exempel 3 Om vi istället ritar ut vinkeln $\pi/3$ på enhetscirkeln, så ser vi att vi får en rätvinklig triangel som måste ha en toppvinkel $\pi/6$.



Den blir därför en halv liksidig triangel med sidan 1. Ur det och Pythagoras' sats följer då att

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Drar vi igen ut radien till den vertikala linjen får vi en lite större halv liksidig triangel, men nu är det halva sidan som är 1. Höjden är därför $\sqrt{3}$ och vi ser att

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Övning 4 Genomför föregående exempel för vinkeln $\pi/6$ och konstatera att

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Övning 5 Beräkna (glöm inte att rita upp enhetcirkeln och vinkeln i den!)

$$a) \quad \cos \frac{5\pi}{3}, \qquad b) \quad \sin(-\frac{3\pi}{4}), \qquad c) \quad \tan \frac{23\pi}{6}.$$

Samband mellan de trigonometriska funktionerna

Det finns ett antal viktiga samband mellan trigonometriska funktioner, vilka härleds direkt ur grundfiguren. I följande övningar ska du övertyga dig geometriskt om varför några av de viktigaste av dessa samband gäller (antag för enkelhets skull att $0 < x < \pi/2$).

Övning 6 Visa att

a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

b) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

c) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
d) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ och $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
e) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ men $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

Förklaringen ska vara rent geometrisk i samtliga fall!

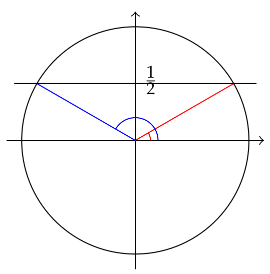
Grundläggande ekvationer

Att gå baklänges med de trigonometriska funktionerna är lite trixigare. Men ritar man figur ger det sig!

Exempel 4 Vi ska hitta alla x sådana att

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Vi börjar då med att hitta alla sådana x som ligger mellan 0 och 2π, och det gör vi genom att rita en figur (så tappar vi inte bort något).



Det vi söker är de två vinklar som svarar mot skärningspunkterna mellan enhetscirkeln och linjen $y = \frac{1}{2}$. Från Övning 4 ovan ser vi att den röda vinkeln är $\pi/6$ och då blir den blå vinkeln $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Men detta är inte hela svaret. Vi kan lägga till godtyckliga varv till detta och få vinklar som uppfyller ekvationen. Svaret är alltså $x = \pi/6 + k2\pi$ eller $x = 5\pi/6 + k2\pi$, där k kan vara ett godtyckligt (positivt eller negativt) *heltal*.

Övning 7 Lös på motsvarande sätt som i exemplet följande ekvationer

$$a)\quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b)\quad \cos x = \frac{1}{2}, \qquad c)\quad \tan x = 1.$$

Övning 8 Bestäm, genom att rita figur, vad $\sin x$ och $\cos x$ är om $\tan x = -\frac{1}{2}$.

Exempel 5 Vi ska lösa ekvationen $\sin(2x) = \sin(3x)$. Vad vi sett från ovan är att $\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k2\pi$ eller $\alpha = \pi - \beta + k2\pi$ (tänk efter ordentligt). Med $\alpha = 3x$ och $\beta = 2x$ betyder det att vi har två fall

(i) $3x = 2x + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi$,
(ii) $3x = \pi - 2x + k2\pi \Leftrightarrow 5x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$.

Vi har alltså att antingen ska $x = 2k\pi$ eller $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ för något heltal k.

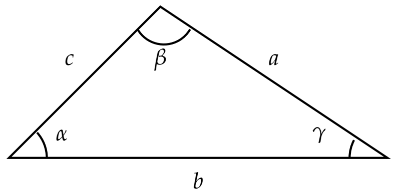
Övning 9 Lös ekvationen $\cos(3x) = \sin\frac{\pi}{5}$.

Övning 10 Lös följande ekvationer

$$a)\quad \cos(3x) = \cos x, \qquad b)\quad \sin(2x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6}).$$

Halva och dubbla vinkeln

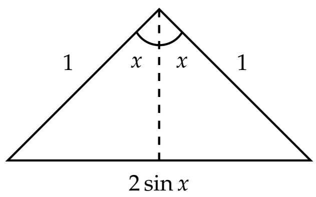
Det finns tre fundamentala satser om trianglar som du förutsätts kunna från tidigare. För att formulera dem utgår vi ifrån följande triangel.



Här är de tre satserna:

Areasatsen: $\quad \text{Arean} = \dfrac{bc\sin\alpha}{2}$
Sinussatsen: $\quad \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}.$
Cosinussatsen: $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$

Vi ska här använda dessa satser till att härleda de viktiga formlerna för dubbla och halv vinkeln av trigonometriska funktioner. Betrakta nedanstående triangel.



Areasatsen medför att

$$\frac{1}{2}\sin 2x = 2\frac{1}{2}\sin x\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

och cosinussatsen att

$$(2\sin x)^2 = 1 + 1 - 2\cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Denna formel kan skrivas om som första likheten i

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 = 2\cos^2 x - 1;$$

den andra och den tredje följer ur den trigonometriska ettan. Tillsammans med

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$

ger detta formler för dubblan vinkeln. Vi får också formlerna för halva vinkeln:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \qquad \cos^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Övning 11 Beräkna $\sin\frac{\pi}{8}$ och $\cos\frac{\pi}{8}$.

Övning 12 Lös ekvationen $\cos 2x = 1 + \sin x$.

Blandade uppgifter

Övning 13 Vilka värden kan $\cos\alpha$ anta om $\sin\alpha = 0.6$?

Övning 14 Bestäm alla lösningar till ekvationerna

$$a)\quad \sin x = \frac{1}{2}, \qquad b)\quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad c)\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d)\quad \tan x = -1, \qquad e)\quad \tan x = \sqrt{3}, \qquad f)\quad \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Övning 15 Lös ekvationerna

$$a)\quad \sin 3x = \sin x, \qquad b)\quad \tan x = \tan 3x.$$

Övning 16 Lös ekvationerna

$$a)\quad \sin x = \cos 2x, \qquad b)\quad \cos 4x = \sin x.$$

Övning 17 Lös olikheten $|\cos(x + \frac{\pi}{4})| < \frac{1}{2}$.

Övning 18 Lös ekvationerna

$$a)\quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}, \qquad b)\quad \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$c)\quad \sin 4x = \cos 3x, \qquad d)\quad \cos 2x = 3\sin x + 2.$$

Övning 19 Lös ekvationerna

$$a)\quad \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}, \qquad b)\quad \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}.$$

Övning 20 Visa att $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$.