Svar och anvisningar till arbetsbladen

Repetitionsmaterial (Facit)
Anders Källén

Notera att detta är första versionen av svaren. Både felräkningar och feltryck kan förekomma!

Fingeröfningar

Övning 1 $a)\ 3,\quad b)\ 3,\quad c)\ 0.12,\quad d)\ 27,\quad e)\ 50.$

Övning 2 $a)\ 21,\quad b)\ -25,\quad c)\ -5,\quad d)\ -30.$

Övning 3 $2/7 = 4/14 = 48/168 = 24/84.$

Övning 4 $a)\ \frac{15}{8},\quad b)\ \frac{8}{15},\quad c)\ \frac{8}{15},\quad d)\ \frac{8}{15}.$

Övning 5 $a)\ \frac{25}{12},\quad b)\ \frac{77}{54},\quad c)\frac{11}{7},\quad d)\frac{13}{1080},\quad e)\ \frac{1}{36},\quad f)\frac{4}{11025}.$

Övning 6 $a)\ \frac{5}{3},\quad b)\ \frac{15}{2},\quad c)\ \frac{1}{7}.$

Övning 7 $a)\ \frac{5}{6},\quad b)\ \frac{8}{21},\quad c)\ -\frac{9}{8},\quad d)\ -\frac{7}{22}.$

Övning 8 $a)\ \frac{8}{3},\quad b)\ 1,\quad c)\ \frac{25}{3}.$

Övning 9 $a)\ \sqrt{3},\quad b)\ \sqrt{7},\quad c)\ 6,\quad d)\ \sqrt{2},\quad e)\ -2,\quad f)\ 13.$

Övning 10 $a)\ 2\sqrt{6},\quad b)\ \sqrt{3},\quad c)\ 3.$

Övning 11 $a)\ 4x-4,\quad b)\ 2a-2b+6,\quad c)\ 2ab-ac-bc.$

Övning 12 $a)\ 3x-1,\quad b)\ 2x+2y,\quad c)\ ac+ad-bc+bd.$

Övning 13 $a)\ 4x^2+12xy+9y^2,\quad b)\ 9x^2-16y^2,$
$c)\ 4x^2+12xy+9y^2-4xz-6yz+z^2.$

Övning 14 $a)\ \frac{x+3}{5},\quad b)\ \frac{7}{2}-\frac{y}{5x}.$

Övning 15 $a)\ \frac{ac}{b^2},\quad b)\ \frac{ac}{b},\quad c)\ \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2},\quad d)\ \frac{2x(2x^2-29)}{(x^2-4)(x^2-25)}.$

Övning 16 $a)\ 2,\quad b)\ \frac{a^2}{8},\quad c)\ 12a,\quad d)\frac{1}{(a+3)^2}.$

Övning 17 $a)\ \frac{x+3}{5},\quad b)\ x^2,\quad c)\ -\frac{xy}{x+y}.$

Övning 18 $a)\ \frac{x+y}{x-y},\quad b)(\frac{4x^2}{9}+y^2)(\frac{2x}{3}-y)$ eller $\frac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)),\quad c)\ x.$

Övning 19 $a)\ 2x-2,\quad b)\ \frac{x+1}{x-1},\quad c)\ 0.$

Övning 20 $a)\ \frac{7}{6(x+3)},\quad b)\ \frac{10}{x+1}.$

Övning 21 $a)\ \frac{1}{x-y},\quad b)\ \frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}.$

Övning 22 $\frac{3}{(x-1)(x-3)}.$

Övning 23 $a)\ \frac{\sqrt{3}-1}{2},\quad b)\ \sqrt{5}+2,\quad c)\frac{5+2\sqrt{7}}{6},\quad d)\ \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}.$

Övning 24 $a)\ 1+\sqrt{2},\quad b)\ \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2},\quad c)\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}.$

Övning 27 $a)$ kvot: x^2+3x-3, rest: $-4x^2+2x+2$
$b)$ kvot: $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, rest: 0
$c)$ kvot: x^2-2x+3, rest: $-2x+10$.

Kvadratkomplettering

Övning 1 Låt a vara hela kvadratens bredd och b den lilla kvadratens bredd. Den gröna triangeln har då arean $(a-b)^2$ och fås ur den stora genom att man tar bort två rektanglar med sidorna a och b. Den lilla kvadraten tas då bort två gånger, varför den måste läggas till igen.

Övning 2 $a)\ (x+1)^2,\quad b)\ (x+1)^2-2,\quad c)\ (y-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}.$

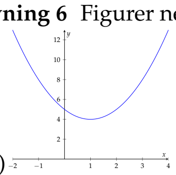
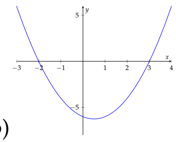
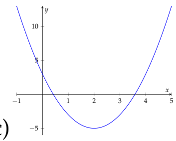
Övning 3 $a)\ -1$ är ett dubbelt nollställe, $\quad b)\ -1\pm\sqrt{2},\quad c)\ 3,-2.$

Övning 4 $p(x) = 4(x+\frac{3}{2})^2+8 \geq 8$ med likhet precis då $x=-3/2$. Minsta värdet är därför 8 och det antas i $x=-3/2$. Polynomet saknar nollställen.

Övning 5 Tecknet på a avgör om kurvan har ett maximum ($a<0$) eller minimum ($a>0$). Extrempunkten antas i $x=-b/2a$ och värdet i den punkten är $c-b^2/4a$. Villkoret för att andragradsekvationen ska ha en lösning är att a och $c-b^2/4a$ har olika tecken (eller $c=b^2/4$), vilket också kan uttryckas som att

$$a(c-b^2/4a) = ac-b^2/4 \leq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4ac.$$

Övning 6 Figurer nedan:


a)

b)

c)

Polynomet i $b)$ har nollställena $-2,3$ medan det i $c)$ har nollställena $2\pm\sqrt{5/2}$

Övning 7 $a)\ (x+3)^2+(y-2)^2-12,$
$b)\ (x-1)^2-(y+\frac{3}{2})^2+(z-2)^2-\frac{11}{4}$

Övning 8 Kvadratkompletteringen blir $2(y-\frac{x+2}{2})^2+\frac{1}{2}(x-4)^2-15$. Vi ser även nu att minsta värdet är -15 och att det antas då $x=4$ och $y=3$.

Övning 9 $a)\ -(x-1)^2+6,\quad b)\ -4(y+\frac{5}{4})^2+\frac{53}{4},$
$c)\ (x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4},\quad d)\ -(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4},\quad e)\ 16(x-\frac{1}{2})^2+5$

Övning 10 I a) har vi nollställena $1\pm\sqrt{6}$, i b) $\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ och i d) $-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. De övriga två saknar nollställen.

Övning 11 $a)\ x^2+4x-1=(x+2)^2-5$ så minsta värdet är -5
$b)\ 5x^2-10x+21=5(x-1)^2+16$ så minsta värdet är 16
$c)\ x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, så minsta värdet är $\frac{3}{4}$.

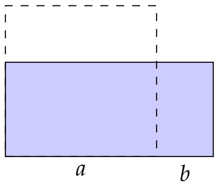
Övning 12 $a)\ 5+2x-x^2=-(x-1)^2+6$ så största värdet är 6
$b)\ 7-10x-x^2=-(x+5)^2+32$ så största värdet är 32
$c)\ 7-10x-4x^2=-4(x+\frac{5}{4})^2+\frac{53}{4}$, så största värdet är $\frac{53}{4}$.

Övning 13 $a)\ (x+2y)^2+2y^2=6(y+\frac{x}{3})^2+\frac{x^2}{3},$
$b)\ (x+2y)^2-3y^2=(y+2x)^2-3x^2,\quad c)\ (x+y)^2.$

Övning 14 Till exempel $a) = (x+y)^2-(z-2y)^2+y^2$ och $b)(x+y-z)^2+(y+2z)^2-3z^2$.

Övning 15 $f(x,y,z)=75-(x-5)^{-}(y-5)^2-(z-5)^2$, så det största värdet är 75 och antas då $x=y=z=5$.

Faktorisering av polynom



Övning 1

Övning 2 $a)\quad 60x,\quad b)\quad 2\sqrt{xy}$

Övning 3 $x = -9, 1$

Övning 4 $a)\ (x-2)(x-1),\quad b)\ 2(3+2x)(1-x),\quad c)$ går ej

Övning 5 Med $\alpha = 4$ får vi $q(x) = x^2 + 2x + 3$ och $C = 18$ och med $\alpha = 3$ får vi $q(x) = x^2 + x - 2$ och $C = 0$. I det senare fallet går divisionen jämnt upp.

Övning 7 $a)\ (x-3)(x+2) = x^2 - x + 6,\quad b)\ (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5}) = (x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x - 1.$

Övning 8 $-2x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 12x.$

Övning 9 $a)\ (x+1)(x-5)(x-7),\quad b)\ (x^2+1)(x-1)(x+1).$

Övning 10 $a)\ (x+2)(3x-2),\quad b)\ 5(x+2)(x-4)$

Övning 11 $a)\quad (x-1)(x+1),\quad b)$ klar, $\quad c)\quad (x-1)(x^2+x+1),\quad d)\ (x+1)(x^2-x+1),\quad e)\ x(x+3)(x^2-3x+9).$

Övning 12 $a)\quad (x-1)(x^2+3x+1),\quad b)\quad (x+2)(x^2+2x+2),\quad c)\ (x-1)^2(x+1)(2x-1)$

Övning 13 $p(2) = 20 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -10.$

Övning 14 $(-1)^{2015} + (-1)^{24} - (-1)^{10} + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$, så svaret är ja.

Övning 15 $p(x) = (x-1)^3(x^2+3x+6)$, så multipliciteten är 3.

Övning 16 $a)\ x(x+6)(x+4),\quad b)\ x^2(x+5)^2,\quad c)\ (x-2)(x^2+2x+2)$

Övning 17 $a)\ (x^2+y^2-z^2-2xy)(x^2+y^2-z^2+2xy) = ((x-y)^2-z^2)((x+y)^2-z^2) = (x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z),\quad b)(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+2xy) = (x-y)^2(x+y)^2.$

Övning 18 Konjugatregeln ger att uttrycket är lika med

$$(2bc - (b^2+c^2-a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2) = (a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)$$

som är lika med uttrycket. Vidare är

$$2(p-a) = a+b+c-2a = b+c-a \quad \text{o.s.v.}$$

vilket visar den andra formeln.

Övning 19 $(x-2)(x+3)(x-y).$

Potenser och potenslagar

Övning 2 $a)\ 64 \cdot 10^9,\quad b)\ \frac{1}{3}.$

Övning 3 $a)\ -6,\quad b)\ 0$

Övning 4 $\frac{1}{81}.$

Övning 5 $a)\ 2,\quad b)\ 4,\quad c)\ \frac{1}{8},\quad d)\ 2,\quad e)\ \frac{1}{9}.$

Övning 6 $a)\ a^{\frac{1}{3}},\quad b)\ a^{\frac{4}{5}},\quad c)\ a^{-\frac{4}{5}},\quad a^{\frac{9}{7}}$

Övning 7 $a)\ -448,\quad b)\ 0,\quad c)\ 192,\quad d)\ -18.$

Övning 8 $a)\ \frac{19}{48},\quad b)\ -\frac{1}{32},\quad c)\ 13$

Övning 9 $a)\ a^{9/4},\quad b)\ a^{4/9},\quad c)\ a^{1/2},\quad d)\ a^{8/15},\quad e)\ a^{7/8}.$

Övning 10 $a)\ \frac{9}{8},\quad b)\ 6\sqrt{3}.$

Övning 13 $a)\ 2,\quad b)\ e^{-x}(1+e^{-1}) = e^{-x-1}(e+1).$

Relationen mellan potens- och logaritmlagar

Övning 1 $a)\ 4,\quad b)\ -2,\quad c)\ 1/2,\quad d)\ 4,\quad e)\ 1/4$

Övning 2 den första svarar mot att $a^0 = 1$, de övriga är direkt ur definitionen.

Övning 3 $a)\ \lg(abc),\quad b)\ 0,\quad c)\ 2,\quad d)\ \ln(ab^3).$

Övning 4 $a)\ 2/\sqrt{5},\quad b)\ e^5/9.$

Övning 5 $\lg(35 \cdot 175) = \lg 35 + \lg 175 = \lg 1000 + 0.784 = \lg 1000 + \lg(6.0898) = \lg(6089.8)$. Eftersom $\lg x = \lg y \Rightarrow x = y$ följer resultatet.

Övning 6 $a)\ 3,\quad b)\ 1/2,\quad c)\ -4,\quad c)\ 1000,\quad d)\ \pi.$

Övning 7 $a)\ \lg 2,\quad b)\ \ln\frac{5}{2},\quad c)\ -\lg 6$

Övning 8 $a)\ \ln x,\quad b)\ 2x,\quad c) t,\quad d)\ 0$

Övning 9 $a)\ \frac{64}{5},\quad b)\ 3,\quad c)\ 1, e^2,\quad d)\ 1, e^4,\quad e)\ 0, \frac{\ln 9}{\ln 4},\quad f)\ 2$ (notera att $\ln(-1)$ inte är definierad!)

Övning 10 ${}^a\log(\frac{x}{y}) = {}^a\log(x\frac{1}{y}) = {}^a\log x + {}^a\log\frac{1}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y.$

Övning 11 $\lg 2^{63} = 63\lg 2 = 18.964890 = 18 + \lg(9.223)$ så $2^{63} \approx 9.223 \cdot 10^{18}$.

Övning 12 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Övning 13 $\ln(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})) = \ln(xe^{x/2}(\sqrt{1+e^{-x}} - 1))$, så det andra uttrycket är $\ln(xe^{x/2}e^{-x}) = \ln x - x/2$. Svaren är alltså lika.

Övning 14 Ekvationen blir $a + b = ab \leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1$. Lösningarna ges därför av $a = 1 + s,\ b = 1 + 1/s$ där $s > 0$.

Ekvationslösning

Övning 1 Den första är $\Rightarrow$, resten ekvivalenser.

Övning 2 $a)$ $x+1=\pm16 \Leftrightarrow x=15,-17$, $\quad b)$ $x=1,3$.

Övning 3 $x=-1$. $x=1$ är inte en lösning eftersom uttrycket inte ens är definierat då.

Övning 4 $x=-1\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y=-1\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Övning 5 $a)$ Sätt $y=x^2$. De reella lösningarna är $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$. $b)$ Samma ekvation som i exempel 2 efter variabelbytet $y=\ln x$. Lösingarna är $x=e^4, \sqrt{e}$.

Övning 6 $x=-1$ är lösning på ekvationen $x+5=-(x-1)^2$.

Övning 7 $a)$ 2, $\quad b)$ -1, $\quad c)$ 6.

Övning 8 $a)$ 2, $\quad b)$ 3

Övning 9 $a)$ Fyra fall: (1) $x=y=0$ (2) $x=0, y^2=1$, (3) $x^2=1, y=0$, (4) $x^2+3y^2=1, x^2+3y^2=3$. Den sista saknar lösning. Svaret är $(0,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$.
$b)$ Två fall $x=0, y^2-1=0$, $y=0, 2x-1=0$. Svaret är $(0,\pm1), (\frac{1}{2},0)$.

Övning 10 $a)$ 1, $\quad b)$ saknas, $\quad c)$ saknas.

Övning 11 $a)$ 6, $\quad b)$ 1, $\quad c)$ saknas.

Övning 12 $a)$ 0, $\quad b)$ 2.

Övning 13 $a)$ 1, $\quad b)$ $7/2$, $\quad c)$ 0, $\quad d)$ $\lg 2$.

Övning 14 $a)$ $1/15$, $\quad b)$ 4, $\quad c)$ $(3\pm\sqrt{17})/4$, $\quad d)$ saknas.

Övning 15 lösning saknas

Övning 16 $a)$ 3, $\quad b)$ 8, $\quad c)$ $(1-\ln 4)/\ln 3$.

Övning 17 $a)$ första ekvationen ger fallen $x=0, x=\pm1, y=0$. Andra ekvationen ger fallen $x=0, 4y^2=1$. Alla punkter på formen $(0,y)$ löser därför båda ekvationerna, men om $x\neq0$ måste $y=\pm\frac{1}{2}$. Sammanfattningsvis har vi lösningarna $(0,y)$, $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$.
$b)$ Den första ekvationen ger de tre fallen $x=0, y=0, y=x$. Ger lösningarna $(0,1)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

Övning 18 $a)$ Den andra ekvationen har lösningarna $x=-1,4$ vilket ger lösningarna $(-1,2/5)$, $(4,-2/5)$.
$b)$ Den tredje ekvationen ger att $y=0$ eller $\lambda=2x$. Fallet $y=0$ ger lösningarna $(1,0,1)$, $(-1,0,3)$. Fallet $\lambda=2x$ innebär att första ekvationen blir $y^2=1$, alltså $y=\pm1$ och då måste $x=0$. Ger alltså lösningarna $(0,\pm1,0)$.

Olikheter

Övning 1 $a)$ $x\le 2$, $\quad b)$ $x\le 10/9$.

Övning 2 $a), b)$ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$, $\quad c)$ $x\neq1$.

Övning 3 $a)$ $1\le x<2$, $\quad b)$ $x\le-2$ eller $-1<x\le0$ eller $x\ge3$.

Övning 4 $a)$ $x<-1$, $\quad b)$ $0\le x\le\frac{2}{3}$, $\quad c)$ $x\le-2$ eller $x\ge1$, $d)$ $x<-2$ eller $1<x<3$, $\quad e)$ alla x.

Övning 5 $a)$ $0<x\le\frac{1}{2}$, $\quad b)$ $x<2$ eller $x\ge5$, $c)$ $x<-\frac{1}{2}$ eller $0<x\le1$.

Övning 6 $a)$ $-2<x<2$, $\quad b)$ $x<-\sqrt{5}$ eller $x>\sqrt{5}$, $c)$ alla x, $\quad d)$ $x>4$ eller $0<x<1$.

Övning 7 $x<-2$ eller $x\ge\sqrt{2}$.

Absolutbelopp

Övning 1 $a)$ 3, $\quad b)$ 3, $\quad c)$ 1, $\quad d)$ 12.

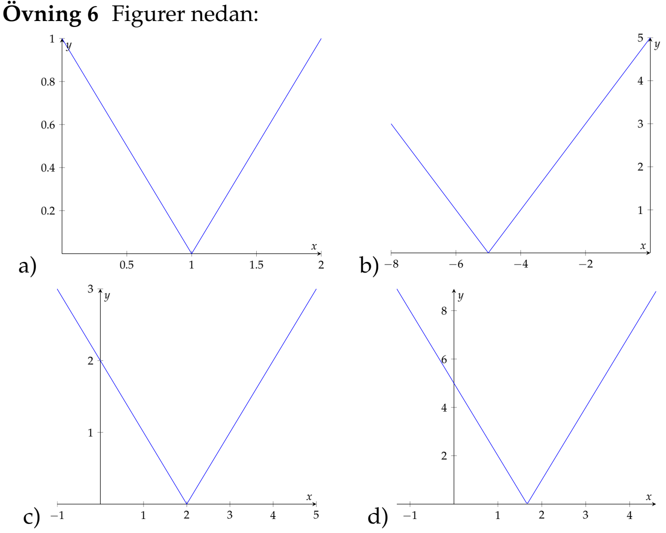
Övning 2 $a)$ $\sqrt{13}$, $\quad b)$ $2\sqrt{5}$, $\quad c)$ $\sqrt{33}$.

Övning 3 $a)$ $-1,3$, $\quad b)$ $-5\pm\sqrt{2}$, $\quad 1,3$, $\quad d)$ $\frac{4}{3},2$.

Övning 4 $a)$ $-1<x<3$, $\quad b)$ $x<-5-\sqrt{2}$ eller $x>-5+\sqrt{2}$, $\quad c)$ $1<x<3$, $\quad d)$ $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$ eller $2<x<\frac{8}{3}$.

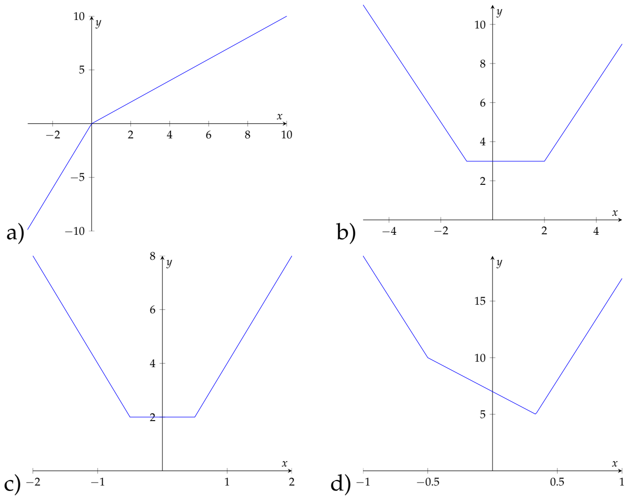
Övning 5 $a=\frac{\frac{7}{3}+\frac{15}{3}}{2}=\frac{11}{3}$ och $b=\frac{1}{2}(\frac{15}{3}-\frac{7}{3})=\frac{4}{3}$.

Övning 6 Figurer nedan:



Övning 7 $a)$ 6, $\quad b)$ $-2.5, 3.5$, $\quad c)$ $-1,1$, $\quad d)$ $1/6, 7/18$.

Övning 8 Figurer nedan:



Övning 9 $x < -2$ eller $x > 2$.

Övning 10 $a)\ -3 < x \leq 1$, $\quad b)\ x = -6$.

Övning 11 $a)\ 3\sqrt{5}$, $\quad b)\ 2\sqrt{34} + 2\sqrt{2}$.

Övning 12 $x > \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ eller $0 < x < 1$ eller $-1 < x < 0$ eller $x < -\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

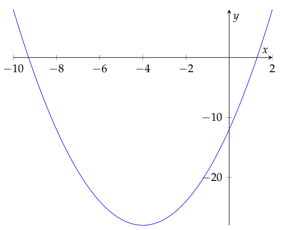
Analytisk geometri (basalia)

Övning 1 $a)\ 5y + 2x = 0$, $\quad b)\ 2y - x + 7 = 0$, $\quad c)\ y = 2$, $\quad d)\ y + 2x - 5 = 0$, $\quad e)\ x = -1$.

Övning 2 $a)\ (\frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$, $\quad b)\ (1, 3)$, $\quad$ c) saknas, linjerna är parallella.

Övning 3 $a)\ 2y + x - 11 = 0$, $\quad b)\ 4y + 3x - 8 = 0$

Övning 4 $y = (x+4)^2 - 28$

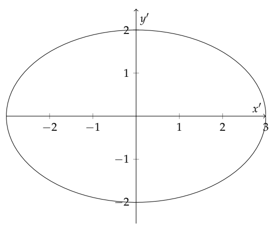


Övning 5 $a)\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$, $\quad b)\ (x+3)^2 + (y+4)^2 = 3$

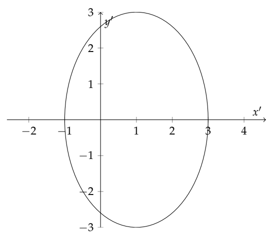
Övning 6) $(x-2)^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = \frac{49}{4}$, dvs cirkel med medelpunkt i $(2, -\frac{5}{2})$ och radien $7/2$.
$b)\ (x+2)^2 + y^2 = 4$, dvs cirkel med medelpunkt i $(-2, 0)$ och radie 2.
$c)\ (x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{6})^2 = \frac{82}{36}$, dvs cirkel med medelpunkt i $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{6})$ och radie $\sqrt{82}/6$.

Övning 7 $y = -x/\sqrt{3} + \sqrt{3}/2 + 1/2\sqrt{3}$.

Övning 8 Ellips med halvaxlar $3, 2$.

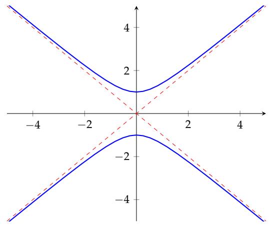


Övning 9 Ellips med centrum i $(1, 0)$ och halvaxlar $2, 3$.



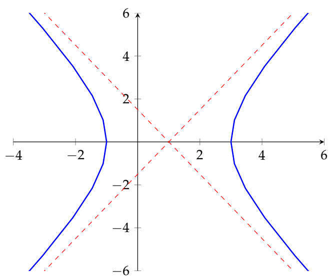
Övning 10 $a)$ Ellips med centrum i $(1, -\frac{5}{2})$ och halvaxlar $\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{41}}{2}$
$b)$ Ingen ellips (en hyperbel), $\quad c)$ Ingen ellips (en parabel)

Övning 11 Skillnaden är att kurvan i första kvadranten nu kan skrivas $y = \sqrt{x^2+1}$ och vi ser då att $y \geq 1$. Graf som nedan



Man kan också tänka på det som att man byter ut x- och y-axlar.

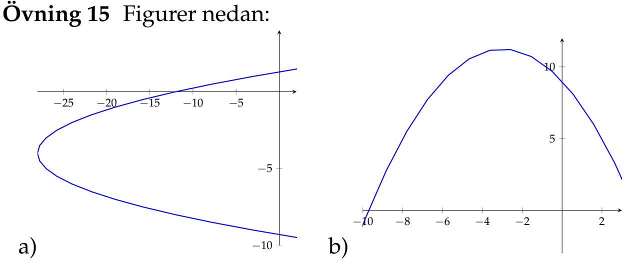
Övning 12 Asymptoterna blir $y = \pm\frac{3}{2}(x-1)$ och kurvan skär x-axeln i $x = 3$ och $x = -1$, varför grafen (med asymptoter) blir



Övning 13 $C = F = 40$.

Övning 14 $a)$ Nej, $\quad b)$ Ja.

Övning 15 Figurer nedan:



Symmetrilinjen i $a)$ är $y = -4$ och den i $b)$ är $x = -3$.

Övning 16 $a = -2$, $b = 3$.

Övning 17 $(2, 8)$, $(-8, -12)$.

Övning 18 En cirkel med medelpunkt i $(1, -2)$ och radien 3. Skärningen med linjen ges av $(-1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 + \frac{4}{\sqrt{5}}), (-1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 - \frac{4}{\sqrt{5}})$.

Övning 19 $a = -6, 2$.

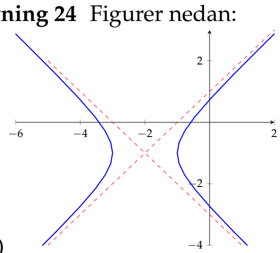
Övning 20 Medelpunkt $(-2, 1)$ och radie 3.

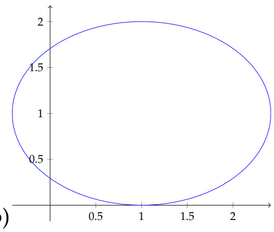
Övning 21 $a)$ Medelpunkt $(0, 1)$ och halvaxlar $1/\sqrt{2}, 1$.
$b)$ Medelpunkt $(2, -1)$ och halvaxlar $\sqrt{2}, 2$.

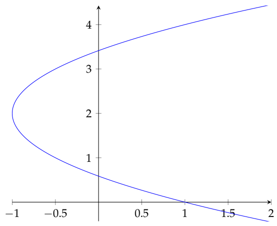
Övning 22 $a)$ Cirkelskivan med medelpunkt i $(2, -\frac{5}{2})$ och radien $\frac{7}{2}$ (alltså området innanför motsvarande cirkel),
$b)$ Allt utanför cirkeln med medelpunkt i $(-2, 0)$ och radien 2,
$c)$ Cirkelskivan med medelpunkt i $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{6})$ och radien $\sqrt{82}/6$.

Övning 23 Medelpunkt $(0, -1)$. Asymptoter: $y = \pm 2x - 1$. Skär y-axeln i $0, -2$.

Övning 24 Figurer nedan:


a)


b)


c)

d) Endast punkten $(-1, -2)$.

Övning 25 $(2, 0)$ och $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$.

Övning 26 $(-3, -1)$ och $(1, 3)$.

Övning 27 Vi får de två ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \text{och} \begin{cases} 8y - 12x &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}.$$

Båda innebär skärningen mellan enhetscirkeln och en rät linje, som i båda fallen skär cirkeln i två punkter (kontrollera genom att rita upp situationen). Det finns alltså fyra lösningar.

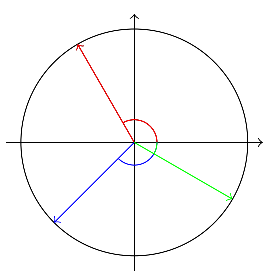
Trigonometriska funktioner

Övning 1 $75° = \frac{5\pi}{12}$, $\quad b)\ 210° = \frac{7\pi}{6}$.

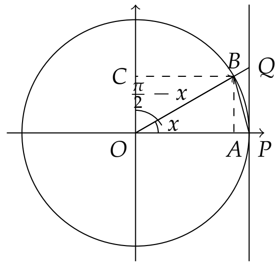
Övning 2 $a)\ \frac{\pi}{6} = 30°$, $\quad b)\ \frac{23\pi}{12} = 345°$.

Övning 3 $\sin x$ då $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, k$ heltal

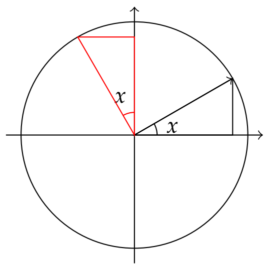
Övning 5 $a)\ \frac{1}{2}$, $\quad b)\ -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad c)\ \tan\frac{23\pi}{6} = \tan(4\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vinklarna är utritade i figuren nedan:



Övning 6 $a)$ Följer av att $(\cos x, \sin x)$ ligger på enhetscirkeln.

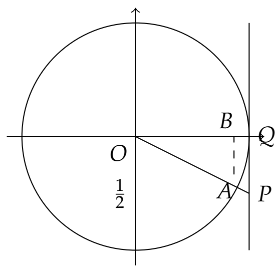


$b)$ Likformighetsargument: $\Delta OAB \sim \Delta OPQ$
$c)$ Pytagoras' sats på ΔOPQ.
$d)$ Identifiera katetrarna i triangeln OBC.
$e)$ Följer ur figuren nedan:



Övning 7 $a)\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ eller $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
$b)\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
$c)\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, där k är ett godtyckligt heltal.

Övning 8 Se figuren nedan:



Hypotenusan i triangeln OPQ har längden $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Det betyder att triangeln OAB har sidor som är $\frac{2}{\sqrt{5}}$ så stora som OPQ. Därför måste $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ medan $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Övning 9 Skriv om som $\sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = \sin\frac{\pi}{5}$ som har lösningarna

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - 3x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} - k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{10} - k\frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Här är k ett godtyckligt heltal, så vilket tecken man har på k spelar ingen roll i svaret. Det är viktigt att man räknar med perioden från början här!

Övning 10 $a)\ \frac{k\pi}{2}$, $\quad b)\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}$.

Övning 11 $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$ och eftersom $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ följer att

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}}.$$

På motsvarande sätt fås att

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}}.$$

Övning 12 Med hjälp av formeln för dubbla vinkeln kan ekvationen skrivas om som $(2\sin x + 1)\sin x = 0$. Denna har lösningarna $x = k\pi$ och $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Övning 13 ± 0.8.

Övning 14 $a)$ $\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $\frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $b)$ $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $-\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $c)$ $\pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$, $d)$ $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $e)$ $\frac{\pi}{3} + k\pi$, $f)$ $\pm\frac{\pi}{9} + k2\frac{2\pi}{3}$.

Övning 15 $a)$ $k\pi$, $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $b)$ $k\pi$ (notera att $\tan(\pm\frac{\pi}{2})$ inte är definierat).

Övning 16 $a)$ $\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $b)$ $\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$.

Övning 17 $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$, k heltal.

Övning 18 $a)$ $\frac{\pi}{12} + k\pi$, $\frac{5\pi}{12} + k\pi$, $b)$ $\pm\frac{\pi}{12} + k\pi$, $c)$ $\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}$, $\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $d)$ $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $-\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Övning 19 $a)$ $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $b)$ $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.