Del B	Uppgift 1-6. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 7-15. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

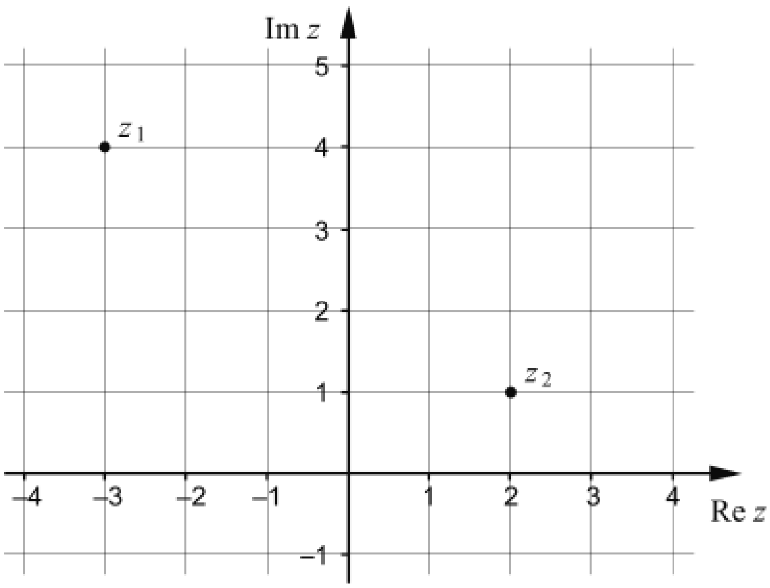
Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ _______________________ (1/0/0)

b) $g(x) = (4x+1)^5$ _______________________ (1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talen z_1 och z_2 är markerade.

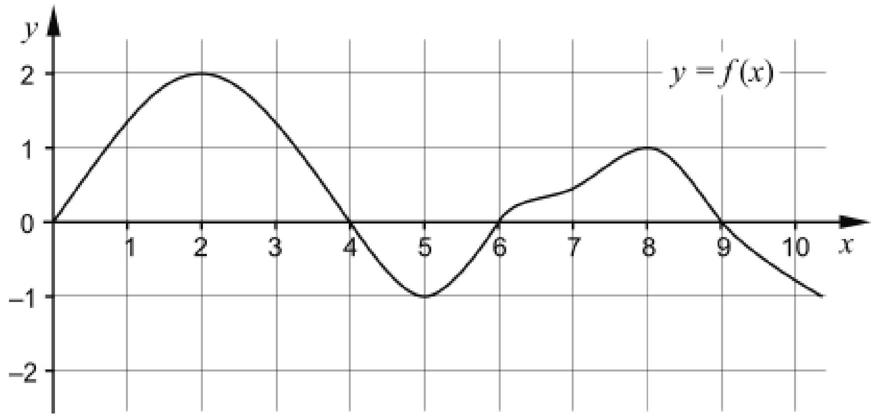


a) Bestäm $\bar{z}_2$ _______________________ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 + z_2$ _______________________ (1/0/0)

3. Ange den lodräta asymptoten till $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ ______________________ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen f.



För vilket värde på a i intervallet $0 \le a \le 10$ antar

$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sitt största värde? ______________________ (0/1/0)

5. För vilka vinklar i intervallet $0° < v < 90°$ gäller att $\sin 3v < \dfrac{1}{2}$?

______________________ (0/1/1)

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \le f(x) \le 7$

______________________ (0/0/1)

Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

7. Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

Agnes får svaret e
Ingela får svaret 0
Kerstin får svaret 1

Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar. (2/0/0)

8. För två komplexa tal z_1 och z_2 gäller att:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + \mathrm{i}$
- $z_1 = 3 - \mathrm{i}$

Bestäm z_2 på formen $a + b\mathrm{i}$ (2/0/0)

9. a) Visa att $\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\right) = 1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

b) Visa att $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$ (0/2/0)

10. Lös ekvationen $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1/1/0)

11. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)

b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)

c) Lös olikheten $|f(x)| > 3$ där $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)

12. Ekvationen $z^p = \mathrm{i}$ ska undersökas för olika värden på heltalet p.
För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos 9° + \mathrm{i} \sin 9°$ en lösning till ekvationen $z^p = \mathrm{i}$

a) Visa att detta gäller för $p = 50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50} = \mathrm{i}$ (0/2/0)

b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p = \mathrm{i}$ (0/0/2)

13. För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p. (0/2/0)

b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)

14. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (2\sin x + 5)\cos x \, \mathrm{d}x$ (0/0/2)

15. Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

> Undersök om funktionen $f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:

$f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(2x-5)^2} < 0$ för alla x.

Då är f avtagande och har sitt största värde i den vänstra ändpunkten, d.v.s. för $x = 0$.

$f(0) = -\dfrac{1}{5}$

Svar: Det största värdet är $-\dfrac{1}{5}$

Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\dfrac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x = 3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften. (0/0/3)

Del D	Uppgift 16-23. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

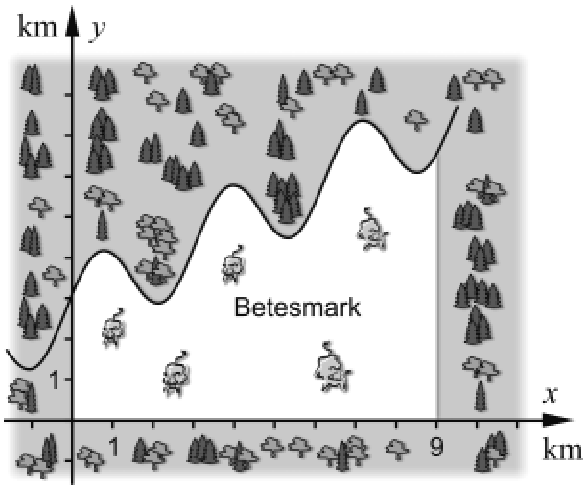
Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

16. Skriv det komplexa talet $z = 2 + 2\mathrm{i}$ på polär form. (2/0/0)

17. En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen
$f(x) = 0{,}5x + \sin 2x + 3$

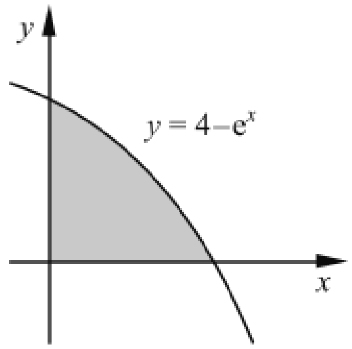
Beräkna betesmarkens area. (2/0/0)

18. Ekvationen $\dfrac{x}{5} + \cos 2x = 2$ har flera lösningar.
Samtliga lösningar ligger i intervallet $-20 \le x \le 20$

a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror. (1/0/0)

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen. (1/0/0)

19. I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror. (0/3/0)

20. En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

$\frac{dv}{dt} + 5v = 10$ där v är fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder.

a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

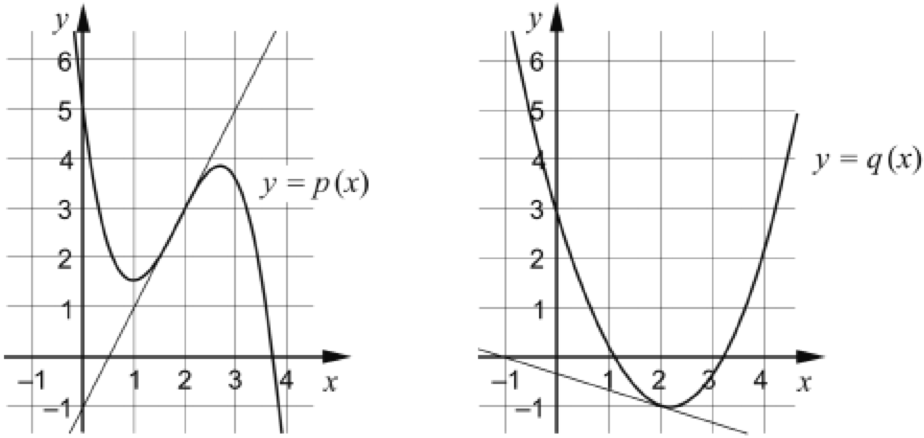
b) Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m. (0/3/0)

21. Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6}e^{-t/6}$, $t \geq 0$

a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)

b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: ”Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter.”
Bestäm värdet på x. (0/2/0)

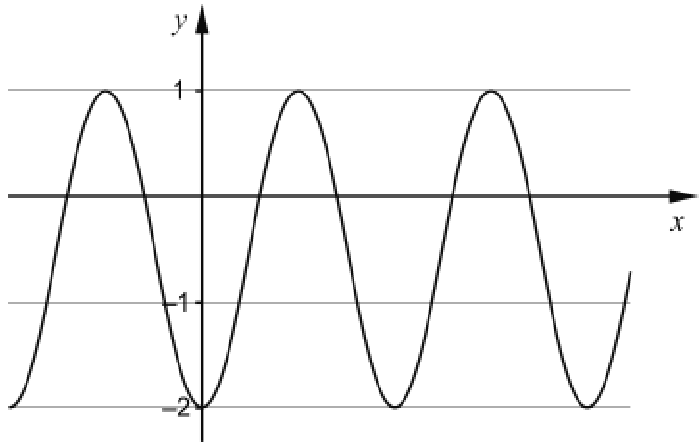
22. Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$



Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$. (0/0/2)

23. I Lisas matematikbok finns följande uppgift:

Figuren visar kurvan $y = A\sin^2 x + B$
Bestäm konstanterna A och B.



Lisa löser uppgiften så här:

$A = \frac{1-(-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$B = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ Svar: $A = 1{,}5$ och $B = -0{,}5$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt. (0/0/2)

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 21a_1 och 21a_2 den första respektive andra poängen i uppgift 21a.

Del	Uppgg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
Del B	1a		1										
	1b		1										
	2a	1											
	2b		1										
	3	1											
	4					1							
	5_1					1							
	5_2									1			
	6									1			
Del C	7_1		1										
	7_2				1								
	8_1			1									
	8_2			1									
	9a_1				1								
	9a_2				1								
	9b_1								1				
	9b_2								1				
	10_1		1										
	10_2						1						
	11a_1	1											
	11a_2					1							
	11b_1						1						
	11b_2								1				
	11c_1											1	
	11c_2									1			
	12a_1						1						
	12a_2						1						
	12b_1											1	
	12b_2											1	

Del	Uppgg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del C	13a_1								1				
	13a_2								1				
	13b_1						1						
	13b_2											1	
	13b_3												1
	14_1											1	
	14_2											1	
	15_1												1
	15_2												1
	15_3												1
Del D	16_1	1											
	16_2	1											
	17_1			1									
	17_2			1									
	18a		1										
	18b		1										
	19_1						1						
	19_2						1						
	19_3						1						
	20a		1										
	20b_1							1					
	20b_2							1					
	20b_3								1				
	21a_1							1					
	21a_2							1					
	21b_1							1					
	21b_2							1					
	22_1									1			
	22_2											1	
	23_1											1	
	23_2											1	
	Total	**5**	**8**	**4**	**6**	**3**	**8**	**6**	**7**	**4**	**0**	**9**	**7**
Σ	**67**	**23**				**24**				**20**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4															
					Aritmetik, algebra och förändring								Samband och förändring					Problem-lösning		
		E	C	A	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4
Del A		3	1	3																
Del B	1a	1	0	0											X					
	1b	1	0	0											X					
	2a	1	0	0		X	X													
	2b	1	0	0	X	X														
	3	1	0	0										X						
	4	0	1	0												X				
	5	0	1	1							X		X							
	6	0	0	1									X							
Del C	7	2	0	0												X				
	8	2	0	0	X													X		
	9a	2	0	0						X		X								
	9b	0	2	0						X		X								
	10	1	1	0							X									
	11a	1	1	0										X						
	11b	0	2	0										X						
	11c	0	0	2									X	X				X		
	12a	0	2	0	X			X												
	12b	0	0	2	X			X										X		
	13a	0	2	0					X			X								
	13b	0	1	2					X									X		
	14	0	0	2						X						X		X		
	15	0	0	3										X						
Del D	16	2	0	0	X															
	17	2	0	0												X		X		
	18a	1	0	0							X									
	18b	1	0	0							X									
	19	0	3	0												X				
	20a	1	0	0													X			
	20b	0	3	0													X	X		
	21a	0	2	0												X		X		
	21b	0	2	0												X		X		
	22	0	0	2											X			X		
	23	0	0	2							X		X					X		
Total		23	24	20																

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Del B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 2\cos 2x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($g'(x) = 20(4x+1)^4$)	+1 E_P
2.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($2 - \mathrm{i}$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar ($-1 + 5\mathrm{i}$)	+1 E_P
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($x = -2$)	+1 E_B
4.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($a = 9$)	+1 C_B
5.		**Max 0/1/1**
	Anger minst ett av de korrekta intervallen, t ex $0° < v < 10°$	+1 C_B
	med korrekt svar ($0° < v < 10°$ och $50° < v < 90°$)	+1 A_B
	Kommentar: Även svaren $v < 10°$ och $v > 50°$ anses godtagbara då intervallet $0° < v < 90°$ är givet.	
6.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar (t ex $f(x) = 3 + 4\sin x$)	+1 A_B

Del C

7. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex beräknar integralen till $\ln e - \ln 1$ +1 E_P

med i övrigt godtagbart resonemang (t ex ”Ja, svaret blir 1. Kerstin har rätt.”) +1 E_R

8. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex anger att $z_2 = \dfrac{(7+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_2 = 2 + \mathrm{i}$) +1 E_{PL}

9. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, t ex förenklar VL till $\sin^2 x + \cos^2 x$ +1 E_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

b) Godtagbar ansats, använder additionssatsen korrekt +1 C_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

10. **Max 1/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = \pm 15° + n \cdot 180°$) +1 C_P

11. **Max 1/3/2**

a) Anger den vågräta *eller* lodräta asymptoten +1 E_B

med korrekt svar ($x = 3$ och $y = 1$) +1 C_B

b) Godtagbar skissning av grafen där båda asymptoterna ingår +1 C_P

med korrekt inritade asymptoter och en graf som tydligt närmar sig asymptoterna +1 C_K

Kommentar: Med godtagbar skissning av grafen menas att grafen, med sitt karakteristiska utseende, ligger på rätt sida om asymptoterna men behöver inte vara korrekt inritad punkt för punkt.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

c) Godtagbar ansats, bestämmer det ena delintervallet, t ex $3 < x < 5$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($2 < x < 3$ eller $3 < x < 5$) +1 A_B

Kommentar: En lösning med svaret $2 < x < 5$ ges ansatspoängen för problemlösning på A-nivå.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

12. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, använder de Moivres formel korrekt +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning +1 C_P

b) Godtagbar ansats, bestämmer ytterligare minst ett värde på *p* med den givna egenskapen +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($p = 10 + n \cdot 40$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 0/3/2**

a) Godtagbar ansats, t ex påbörjar en korrekt uppställd polynomdivision +1 C_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R

b) Godtagbar ansats, bestämmer minst tre rötter +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_1 = -2\mathrm{i}$, $z_2 = 2\mathrm{i}$, $z_3 = \sqrt[3]{2}$, $z_4 = \sqrt[3]{2}(\cos 120° + \mathrm{i} \sin 120°)$ och $z_5 = \sqrt[3]{2}(\cos 240° + \mathrm{i} \sin 240°)$) +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, minustecken, rottecken, index, parenteser, termer såsom polär form, koefficient samt hänvisning till de Moivres formel etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer en korrekt primitiv funktion +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\frac{11}{4}$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

15. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t ex anger att felet beror på att Lasse inte tar hänsyn till att det finns ett x-värde där funktionen inte är definierad +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med godtagbar slutsats (t ex ”Nej, den har inget största värde.”) +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, $f(x)$, $f'(x)$, parenteser, lim, tydlig skiss, termer såsom nollställe, derivata, största värde, definierad, graf, asymptot, x-axel etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Del D

16. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\arg(z)$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($2{,}8(\cos 45° + \mathrm{i}\sin 45°)$) +1 E_B

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, korrekt tecknad integral, $\int_0^9 (0{,}5x + \sin 2x + 3)\,\mathrm{d}x$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (47 km^2) +1 E_M

Kommentar: Om grader använts i stället för radianer fås det ej godtagbara svaret 49 km^2.

18. **Max 2/0/0**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ($x \approx 5{,}97$) +1 E_P

b) Godtagbar lösning med korrekt svar (7) +1 E_P

19. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer övre integrationsgränsen eller tecknar integralen $\pi\int_0^a (4 - \mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$ +1 C_P

med godtagbar fortsättning, tecknar ett uttryck för volymen, $\pi\int_0^{1{,}386} (4 - \mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17,8) +1 C_P

20. **Max 1/3/0**

a) Godtagbar lösning +1 E_P

b) Godtagbar ansats, t ex tecknar en korrekt ekvation för bestämning av tiden,

t ex $\int_0^x (2-2\cdot e^{-5t})\mathrm{d}t = 8$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,2 s) +1 C_M

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, VL, HL, $v'(t)$, $v(t)$, integraltecken, parenteser, termer såsom differentialekvation, integral, integrationsgräns, primitiv funktion etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 0/4/0**

a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en integral för bestämning av sannolikheten att väntetiden är högst 10 minuter +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,81) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation för bestämning av x +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($x \approx 4{,}2$) +1 C_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex anger att $r'(2) = p(2)\cdot q'(2) + p'(2)\cdot q(2)$ +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($r'(2) = -3$) +1 A_{PL}

23. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer en av konstanterna med godtagbar motivering +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($A = 3, B = -2$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 9a

Elevlösning 1 (1 E_R)

a) $\cos^2 x\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=1$

$$\Rightarrow \cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1$$

Kommentar: Elevlösningen bygger från och med tredje raden på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 9b

Elevlösning 1 (1 C_R)

b. $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

VL: $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}$

$= \sqrt{2}\cos x\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,\frac{\cos x\sqrt{2} - \sin x\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}\cos x\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}}{2} = \cos x - \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cos x\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}}{2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$

Man kan skriva om:

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 1}$

$\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$

Kommentar: Elevlösningen anses behandla additionssatsen korrekt även om parenteser saknas på rad två och tre. Elevlösningen bygger på likheten som ska visas från och med fjärde raden. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_R)

$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$

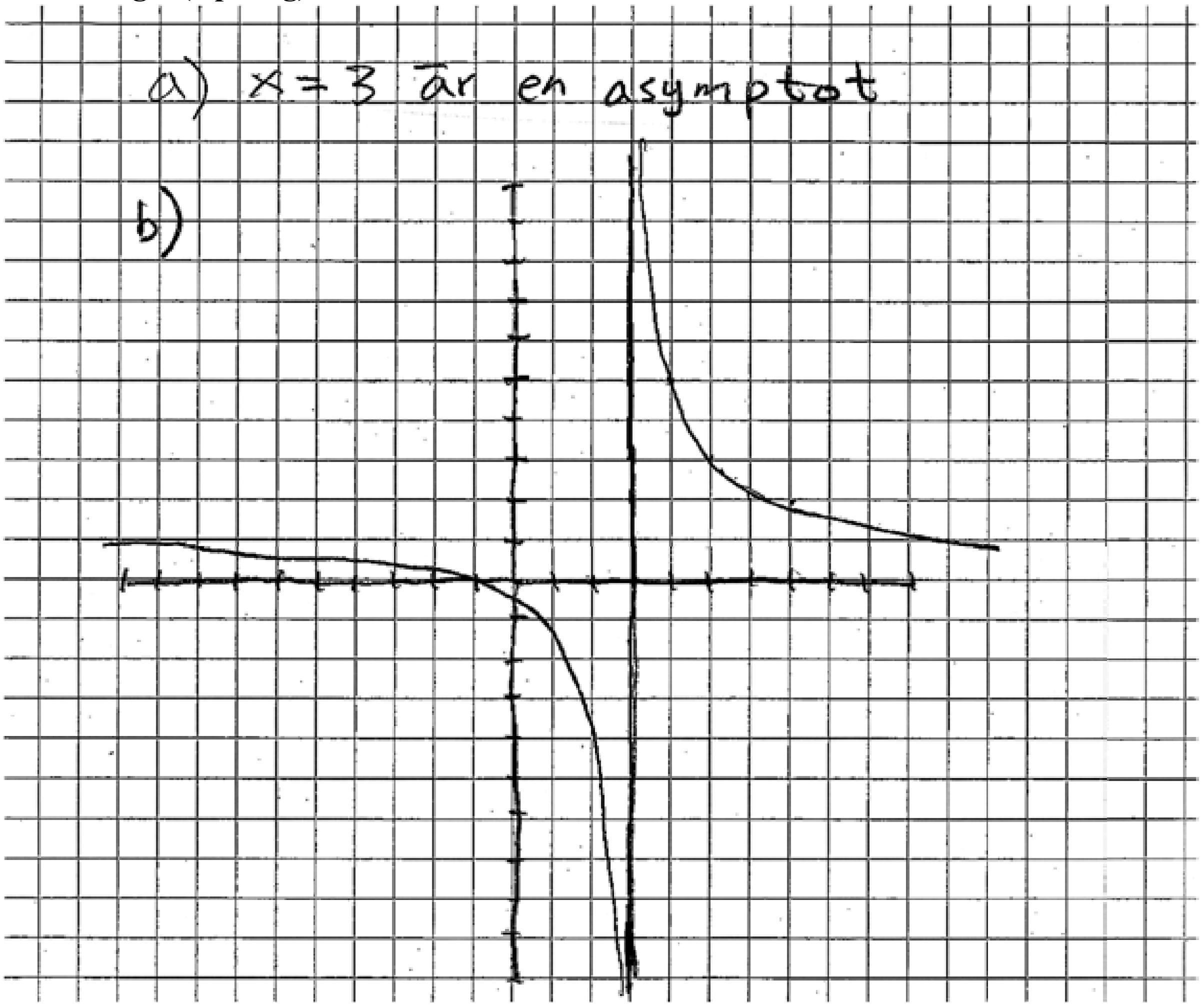
V.L. $= \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\cos x\cdot\cancel{\cos\frac{\pi}{4}} - \sin x\cdot\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}} =$

$= \cos x - \sin x =$ H.L.

Kommentar: Lösningen visar en korrekt metod för bevisföring. Trots att förenklingen i sista steget är något otydlig så ges lösningen båda resonemangspoängen på C-nivå.

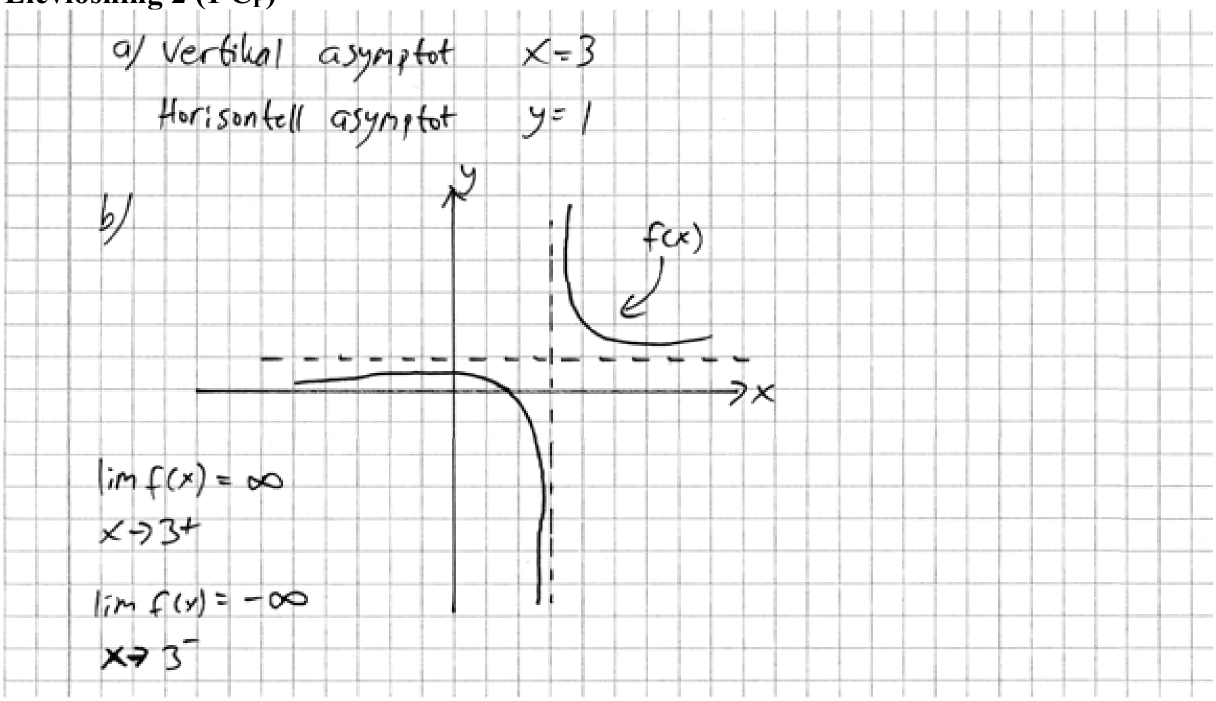
Uppgift 11b

Elevlösning 1 (0 poäng)



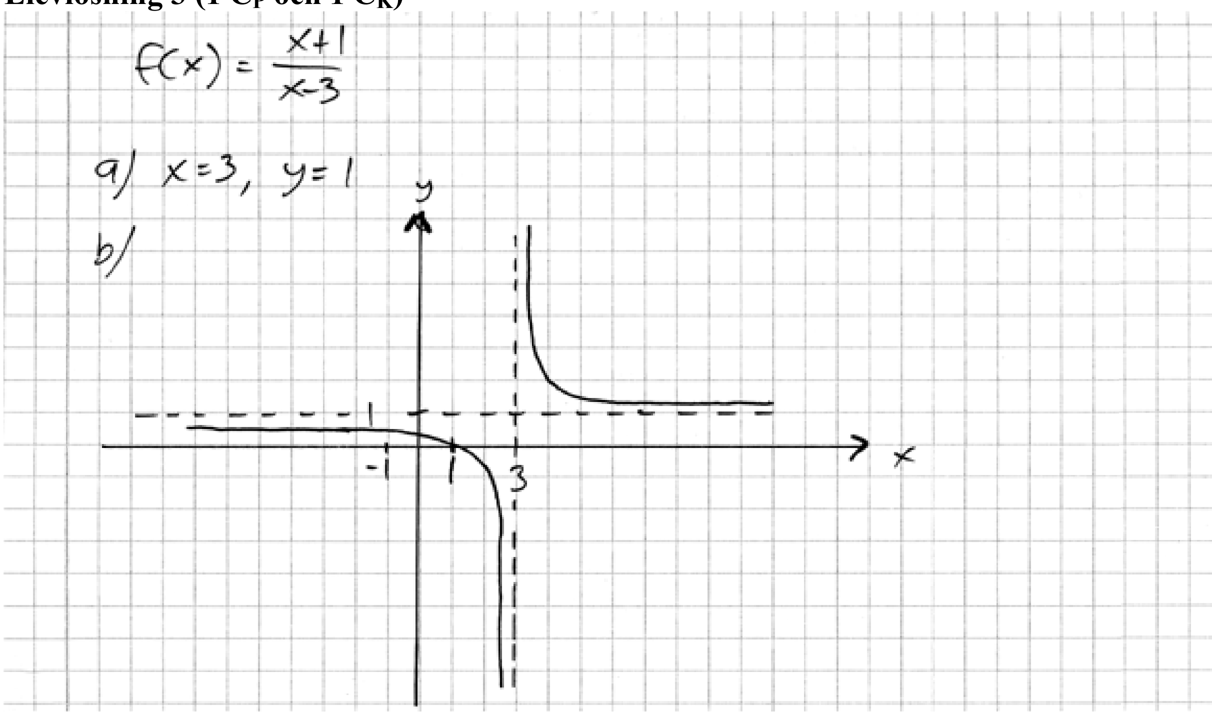
Kommentar: Elevlösningen visar på en skiss där den horisontella asymptoten saknas. Därmed uppfylls inte kravet för ansatspoängen gällande procedur på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_P)



Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar skiss över kurvans karakteristiska utseende. Asymptoterna är inritade men kurvan närmar sig inte dessa. Sammantaget ges lösningen till b)-uppgiften en procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_P och 1 C_K)



Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar skiss där asymptoterna är inritade. Även om inte grafen tydligt närmar sig asymptoterna så bedöms skissen vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen till b)-uppgiften en procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

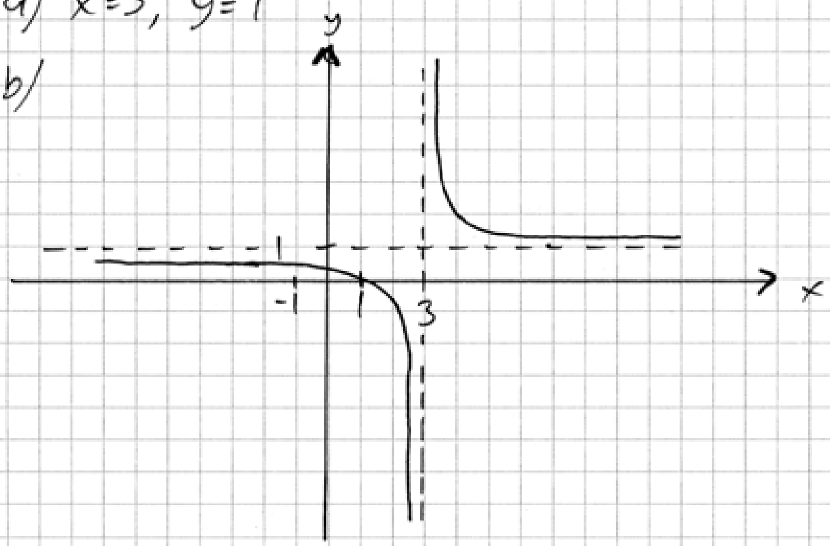
Uppgift 11c

Elevlösning 1 (1 A_{PL})

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

a) $x = 3$, $y = 1$

b)



c) $|f(x)| > 3$ $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| > 3$

$x = 1 \Rightarrow \frac{1+1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

$x = 2 \Rightarrow \frac{2+1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$

$x = 4 \Rightarrow \frac{4+1}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$

$x = 5 \Rightarrow \frac{5+1}{5-3} = \frac{6}{2} = 3$

$x = 6 \Rightarrow \frac{6+1}{6-3} = \frac{7}{3}$

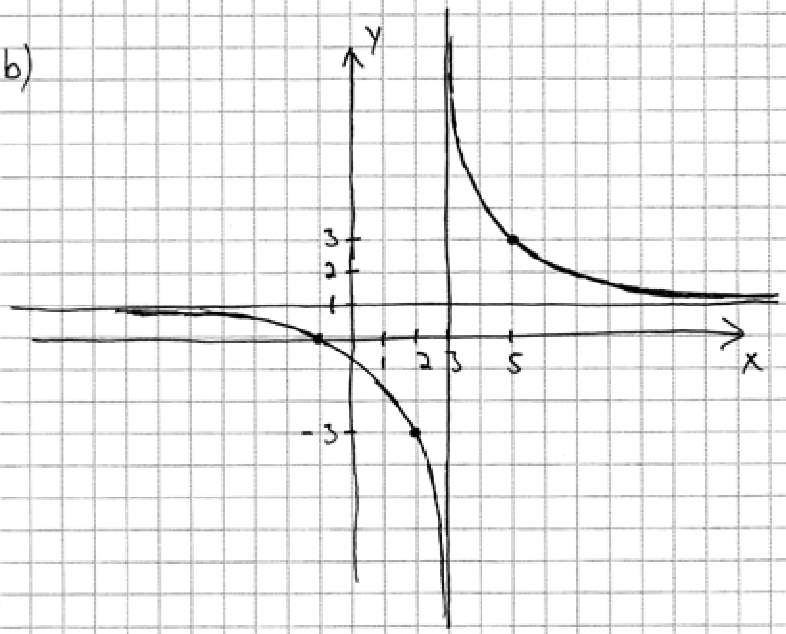
Svar: $2 < x < 5$

Kommentar: Elevlösningen visar hur ett antal funktionsvärden beräknats. Tillsammans med den schematiska skissen i b)-uppgiften anses lösningen nätt och jämnt vara godtagbar trots att en motivering eller hänvisning till skiss saknas. Sammantaget ges lösningen till c)-uppgiften en problemslösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_{PL} och 1 A_B)

a) $x = 3 \quad y = 1$

b)



c) $|f(x)| > 3$

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

$\left|\frac{x+1}{x-3}\right| > 3$

$$\left.\begin{array}{l} x > 2 \Rightarrow |f(x)| > 3 \\ x < 5 \Rightarrow |f(x)| > 3 \end{array}\right\} \quad 2 < x < 5 \quad x \neq 3 \Rightarrow |f(x)| > 3$$

<u>Svar c:</u> $2 < x < 5 \quad x \neq 3 \Rightarrow |f(x)| > 3$

Kommentar: Elevlösningen visar på en godtagbar lösning där två punkter tydligt och korrekt markerats i grafen i b)-uppgiften. En hänvisning till grafen saknas men anses vara underförstådd då punkterna är så tydligt markerade. Sammantaget ges lösningen till c)-uppgiften en problemlösningspoäng och en begreppspoäng på A-nivå.

Uppgift 12b

Elevlösning 1 (2 A_{PL})

$z_1^p = 1^p \cdot (\cos(9^\circ \cdot p) + i \sin(9^\circ \cdot p)) = i = z^p$

$1^p \cdot (\cos(9^\circ \cdot p) + i \sin(9^\circ \cdot p)) = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

$9^\circ \cdot p = 90^\circ$

$p = 10 + \frac{360}{9} \cdot n = 10 + 40n$

$p = 10 + 40n$ då z_1 är en lösning till $z^p = i$

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar lösning av problemet trots att vissa förklaringar saknas, bland annat motivering av perioden. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 13

Elevlösning 1 (2 C_R och 1 C_P)

a:

$z^3 - 2$

$z^5 + 0z^4 + 4z^3 - 2z^2 + 0z - 8 \;\big|\; z^2 + 4$

$-(z^5 + 4z^3)$

$-2z^2 + 0z - 8$

$-(-2z^2 - 8)$

$0 \; 0$

faktor

Svar: $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2 + 4)(z^3 - 2)$

b: $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$

lösning 1: $(z^2 + 4) = 0 \quad z^2 = -4$

$z_1 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

lösning 2:

$(z^3 - 2) = 0 \quad z = \pm\sqrt[3]{2}$

Svar: $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ $\quad z_{3-5} = ?$

Kommentar: Elevlösningen visar i a)-uppgiften en polynomdivision som utmynnar i att $z^2 + 4$ är en faktor. I b)-uppgiften bestäms fyra lösningar varav tre korrekta. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på C-nivå i a)-uppgiften samt, på grund av den felaktiga lösningen $-\sqrt[3]{2}$, nätt och jämnt en procedurpoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Elevlösning 2 (2 C_R, 1 C_P, 1 A_{PL} och 1 A_K)

a) $P(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

$$\begin{array}{r|l} & z^3 - 2 \\ \hline z^2+4 & z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 \\ & -(z^5 + 4z^3) \\ \hline & 0 \quad - 2z^2 - 8 \\ & -(-2z^2 - 8) \\ \hline & 0 \end{array}$$

Resten $= 0 \Rightarrow z^2 + 4$ är en faktor i polynomet.

b) $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2+4)(z^3-2)$

$(z^2+4)(z^3-2) = 0$

$z^2 + 4 = 0$

$z^2 = -4$

$z = \pm 2i$

$z^3 - 2 = 0$

$z^3 = 2$

$z^3 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$

$z = r(\cos v + i \sin v)$

$r^3 = 2$

$3v = 0 + n \cdot 2\pi$

$v = \frac{2\pi}{3} \cdot n$

Svar: $z_1 = 2i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = 2^{1/3}$

$z_4 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \quad z_5 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

Kommentar: Elevlösningen visar i a)-uppgiften en polynomdivision och en motivering av att $z^2 + 4$ är en faktor. I b)-uppgiften bestäms samtliga lösningar till ekvationen. Lösningen är väl motiverad i a)-uppgiften, i b)-uppgiften saknas bland annat hänvisning till de Moivres formel. Lösningen är trots detta lätt att följa och förstå och anses därmed nätt och jämnt uppfylla kravet för kommunikationspoäng. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 14

Elevlösning 1 (2 A_{PL})

$$\int_0^{\pi/6} (2\sin x + 5)\cos x \, dx$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x + 5\cos x$$

$$f(x) = (\sin x)^2 + 5\sin x + C$$

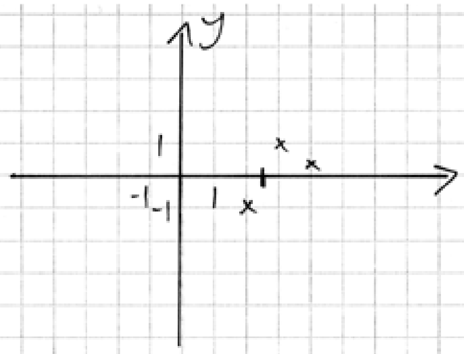
$$\left[(\sin x)^2 + 5\sin x\right]_0^{\pi/6} \qquad (\sin 0 = 0)$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + 5\sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt primitiv funktion med ett korrekt svar. Motivering av hur den primitiva funktionen tagits fram saknas men lösningen anses ändå vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 A_R)



Att $f'(x) < 0$ innebär att funktionen aldrig är stigande. Men om den har en asymptot (då $x = 2,5$) kan den alltid vara avtagande och ändå ha ett större y-värde då x-värdet ökar.

Kommentar: I elevlösningen konstateras att funktionen har en asymptot och skissen visar två funktionsvärden (då $x = 3$ och då $x = 4$) som är större än $-\frac{1}{5}$. Detta anses vara jämförbart med en godtagbar ansats. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)

Lasse har glömt att funktionen har en asymptot vid $x = 2,5$ (då är nämnaren $= 0$) och om $x \to 2,5$ från $x > 2,5$ kommer $f(x)$ att gå mot ett oändligt stort tal.
Därför antar inte heller funktionen något egentligt största värde vid $x \geq 0$, eftersom $f(x) \to \infty$ när $x \to 2,5$ från $x > 2,5$ är det inget definierat största värde vid $x = 2,5$.

Kommentar: Elevlösningen är korrekt med godtagbar motivering. Lösningen är lätt att följa och förstå trots att en förklarande skiss saknas. Kraven för kommunikationspoäng på A-nivå uppfylls därmed nätt och jämnt.

Uppgift 20

Elevlösning 1 (1 E_P och 2 C_M)

$$\frac{dV}{dt} + 5v = 10 \quad \rightarrow \quad v' + 5v = 10$$

a) $v(t) = 2 - 2e^{-5t}$

$v'(t) = 0 + 10e^{-5t}$

$0 + 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t})$

$10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} = 10$

b) $2 - 2e^{-5t}$

$F(x) = 0{,}4\ e^{-5t}$

$F(B) - F(A)$

$\int_0^x 2 - 2e^{-5t} = 8$

$\left[2t + 0{,}4e^{-5t}\right]_0^x$

$F(x) = 2x + 0{,}4e^{-5x} - 0{,}4 \quad = Y_1$

$F(x) = 8 \quad = Y_2$

} Ritar Y_1 och Y_2 på räknaren. Hittar skärningspunkten med "intersect".

$x = 4{,}2$

Svar $4{,}2$ sek.

Kommentar: Elevlösningen visar på godtagbara lösningar av båda deluppgifterna. Vad gäller kommunikation så saknas t ex uttryck som VL och HL i a)-uppgiften och b)-uppgiften är ostrukturerad och relativt svår att följa. Därmed uppfylls inte kravet för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå i a)-uppgiften samt två modelleringspoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Elevlösning 2 (1 E_P, 1 C_M och 1 C_K)

a) $\frac{dv}{dt} + 5v = 10$

$v' + 5v = 10$

$v(t) = 2 - 2e^{-5t}$

$v'(t) = -2e^{-5t} \cdot (-5) = 10e^{-5t}$

$v' + 5v = 10$

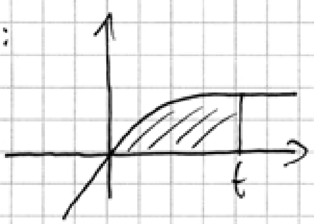
$V.L. = 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t}) = 10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} =$

$= 10 = H.L.$

Svar: $v(t) = 2 - 2e^{-5t}$ är alltså en lösning till differentialekvationen

b) $v = 2 - 2e^{-5t}$

Skiss:



Arean under grafen är sträckan

När arean under grafen är 8 har fågeln nått marken.

$\int_0^x (2 - 2e^{-5t})dt = 8 \Rightarrow \left[2t + 0{,}4e^{-5t}\right]_0^x = 8$

$2x^2 + 0{,}4e^{-5x} = 8 \Rightarrow x = 2$ sek.

Svar: Fågeln når marken efter 2 sekunder.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och trots att lösningen innehåller en felaktighet i b)-uppgiftens näst sista rad så bedöms lösningen vara tillräckligt korrekt för att kunna ges kommunikationspoäng. Lösningen kommuniceras med t ex $v(t)$, $v'(t)$, VL, HL, en skiss med förklarande text och en förklaring ”När arean under grafen är 8 har fågeln nått marken.”. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå i a)-uppgiften och den första modelleringspoängen på C-nivå samt en kommunikationspoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (2 C_M och 2 C_{PL})

a) Skriv in funktionen på grafritaren.
Välj $\int f(x)\,dx$ och ange lower limit 0 och
upper limit 10.
svar: $P = 0{,}81$

b) Testade mig fram på räknaren med lower limit 0

upper limit	sannolikheten att få hjälp inom x min
5	0,57
4	0,49
4,5	0,53
4,3	0,51
4,1	0,495
4,2	0,503

$x = 4{,}2$ min. Dock är det troligt att man skulle välja att avrunda till hela minuter.

Kommentar: Elevlösningen visar på en godtagbar lösning. Redovisningen om hur det digitala hjälpmedlet använts är tydlig i a)-uppgiften och i b)-uppgiften anses redovisningen vara implicit förklarad av a)-uppgiften. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng för båda deluppgifterna.

Uppgift 21b

Elevlösning 1 (1 C_{PL})

b) $$\int_0^x \left(\frac{1}{6} e^{-x/6}\right) dx = 0{,}5$$

Genom att testa sig fram på räknaren kom jag fram till ett närmevärde på 4,2 min.

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt uppställd ekvation för bestämning av tiden. Förklaring till hur det digitala hjälpmedlet använts saknas, därmed anses inte lösningen vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen av b)-uppgiften en problemlösningspoäng på C-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_{PL})

$A \sin x \cdot \sin x + B$

$A = 1 - (-2) = 3$

B: Eftersom $\sin^2 x + 0$ kurvan har
sin min-punkt på x-axeln, kommer B-värdet
vara avståndet mellan funktionens min-punkt
och x-axeln. I det här fallet blir $B = -2$.

$A = 3$

$B = -2$

Kommentar: Lösningen visar en bestämning av konstanten B med godtagbar motivering. Motivering till varför konstanten $A = 3$ saknas. Sammantaget ges lösningen den första problemslösningspoängen på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_{PL})

$y(x) = A\sin^2 x + B$

$y(0) = 0 + B = -2$ ← kollar det grafiskt i grafen
på provpappret

$\Rightarrow B = -2$

Termen $A\sin^2 x$ kommer alltid att vara positiv i och
med kvadrattermen. När $x = \pi/2$ eller $3\pi/2$ kommer
$\sin^2 x$ att ha sitt högsta värde: $\sin^2 \pi/2 + n\pi = 1 \Rightarrow$

$A \cdot 1 - 2 = 1$ ← (det högsta värdet kurvan antar är 1,
det är grafiskt verifierbart, se provpappret)

$A - 2 = 1$

$A = 3$ SVAR: $A = 3$ och $B = -2$

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av de båda konstanterna. Konstanternas värde motiveras väl trots det felaktiga påståendet ”Termen $A\sin^2 x$ kommer alltid att vara positiv”. Sammantaget ges lösningen två problemslösningspoäng på A-nivå.